Corrigé

Série d'exercices Classe : 1re SPE Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Il faut, pour chaque question, regarder la tangente à la courbe tracée en rouge au point d'abscisse a donné.

1. Ici, la tangente a pour coefficient directeur 1. Donc $f'(1) = 1$.
   Ainsi, la tangente tracée a pour équation réduite :
   $$\boxed{y = x - 1}$$
   (N'oublions pas que dans l'équation d'une droite $y = mx + p$, p désigne l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées).
2. Ici, le coefficient directeur de la tangente tracée est $-\frac{1}{2}$. En effet, les points $A(0;1)$ et $B(2;0)$ sont sur la tangente donc :
   $$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-1}{2-0} = -\frac{1}{2}.$$
   Ainsi, $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
   L'équation réduite de la tangente sera alors :
   $$\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 1}$$
3. Ici, le coefficient directeur de la tangente est $\frac{1}{2}$, donc $f'(1) = \frac{1}{2}$.
   L'équation réduite de la tangente sera alors :
   $$\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$$
4. Ici, la tangente est horizontale donc son coefficient directeur est égal à 0.
   L'équation de la tangente est alors :
   $$\boxed{y = -1}$$

Exercice n°2

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f'(a)$ puis trouver l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

1. $f(x) = x^2$, $a = 2$.
   — Calcul de $f'(2)$.
   Le taux d'accroissement de f en 2 est :
   $$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}\\ &= \frac{(2+h-2)(2+h+2)}{h}\\ &= \frac{h(4+h)}{h}\\ &= 4+h.\end{aligned}$$
   Ainsi, le nombre dérivé de f en 2 est :
   $$f'(2) = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4.$$
2. L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est alors :
   $$\begin{aligned}y &= f'(a)(x-a) + f(a)\\ y &= f'(2)(x-2) + f(2)\\ y &= 4(x-2) + 4\\ y &= 4x - 8 + 4\\ y &= 4x - 4.\end{aligned}$$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$.
   — Calcul de $f'(1)$.
   Le taux d'accroissement de f en 1 est :
   $$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{1+h} - \frac{1}{1}}{h}\\ &= \frac{\frac{1}{1+h} - \frac{1+h}{1+h}}{h}\\ &= \frac{\frac{-h}{1+h}}{h}\\ &= -\frac{h}{h(1+h)}\\ &= -\frac{1}{1+h}.\end{aligned}$$
   Ainsi, le nombre dérivé de f en 1 est :
   $$f'(1) = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{1+h}\right) = -1.$$
   — L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est alors :
   $$\begin{aligned}y &= f'(a)(x-a) + f(a)\\ y &= f'(1)(x-1) + f(1)\\ y &= -1(x-1) + 1\\ y &= -x + 1 + 1\\ y &= -x + 2.\end{aligned}$$
3. $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $a = -1$.
   — Calcul de $f'(-1)$.
   Le taux d'accroissement de f en -1 est :
   $$\begin{aligned}&\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}\\ &= \frac{(-1+h)^2 - 2(-1+h) + 3 - \left((-1)^2 - 2\times(-1) + 3\right)}{h}\\ &= \frac{h^2 - 2h + 1 + 2 - 2h + 3 - 6}{h}\\ &= \frac{h^2 - 4h}{h}\\ &= \frac{h(h-4)}{h}\\ &= h - 4.\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en -1 est :

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}(h-4)=-4.$$

— L'équation de la tangente au point d'abscisse -1 est alors :

$$\begin{aligned}
y &= f'(a)(x-a)+f(a)\\
y &= f'(-1)(x+1)+f(-1)\\
y &= -4(x+1)+6\\
y &= -4x-4+6\\
y &= -4x+2.
\end{aligned}$$

4. $f(x)=\sqrt{x}$, $a=3$.

— Calcul de $f'(3)$.
Le taux d'accroissement de f en 4 est :

$$\begin{aligned}
&\frac{f(4+h)-f(4)}{h}\\
&=\frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h}\\
&=\frac{\left(\sqrt{4+h}-2\right)\left(\sqrt{4+h}+2\right)}{h}\\
&=\frac{h^2-4h}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}\\
&=\frac{4+h-4}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}\\
&=\frac{h}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}.
\end{aligned}$$

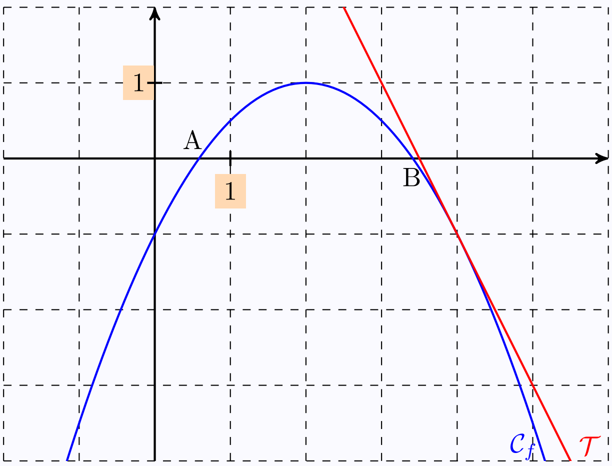
Ainsi, le nombre dérivé de f en 4 est :

$$f'(4)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}\right)=\frac{1}{4}.$$

— L'équation de la tangente au point d'abscisse 4 est alors :

$$\begin{aligned}
y &= f'(a)(x-a)+f(a)\\
y &= f'(4)(x-4)+f(4)\\
y &= \frac{1}{4}(x-4)+2\\
y &= \frac{1}{4}x-1+2\\
y &= \frac{1}{4}x+1.
\end{aligned}$$

Exercice n°3



1. — $f(0)=-1$;
   — $f(2)=1$;
   — $f'(2)=0$ car la fonction atteint un maximum pour $x=2$;
   — $f(4)=-1$;
   — $f'(4)=-2$ (coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 4).
2. — $f(0)=a\times 0^2+b\times 0+c=c$; donc $c=-1$ d'après la question précédente (1^er point).
   — $f'(x)=2ax+b$ et $f'(2)=4a+b$; donc $4a+b=0$, soit $b=-4a$.
   — $f(2)=1$ donc $4a+2b-1=1$, soit $-b+2b=2$ d'après le point précédent. Ainsi, $b=2$.
   — $f'(4)=8a+b=-2$ donc $8a=-4$, soit $b=-\frac{1}{2}$.

   Finalement, on a : $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$.
3. L'abscisse des points A et B sont les solutions de l'équation $f(x)=0$.

$$\Delta=2^2-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-1)=4-2=2.$$

Ainsi,

$$x_B=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\qquad x_A=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_B=\frac{-2-\sqrt{2}}{-1}\qquad x_A=\frac{-2+\sqrt{2}}{-1}$$

$$\underline{x_B=2+\sqrt{2}}.\qquad \underline{x_A=2-\sqrt{2}}.$$

Exercice n°4

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,$$

où a, b, c et d sont quatre nombres réels.

1. — $A1-1\in\mathcal{C}_f$ donc $f(1)=-1$, soit :

$$a+b+c+d=-1\tag{1}$$

   — la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A a pour équation : $y=-2x+1$ donc $f'(1)=-2$, soit :

$$3a+2b+c=-2\tag{2}$$

— $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2 donc $f(0) = 2$, d'où :

$$d = 2.$$

— $f'(0) = -5$ et $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ donc :

$$c = -5.$$

Les équations 1 et 2 donnent alors le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = -1 - (-5) - 2 = 2 \\ 3a + 2b = -2 - (-5) = 3 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} a = 2 - b \\ 3(2 - b) + 2b = 3 \end{cases}$$

La seconde équation donne alors :

$$6 - b = 3 \qquad \text{soit :} \qquad b = 3.$$

La première équation donne alors :

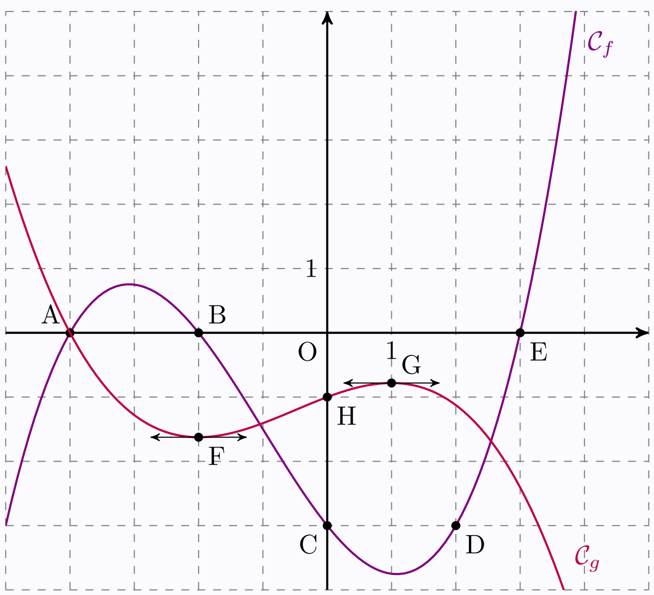
$$a = 2 - 3 = -1.$$

On obtient finalement :

$$\boxed{f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5x + 2.}$$

Exercice n°5

On considère les fonctions f et g dont les courbes représentatives sont données ci-dessous :



On sait que :

— les fonctions f et g sont des polynômes de degré 3 ;

— $\mathcal{C}_f$ passe par les points A, B, C, D et E ;

— $\mathcal{C}_g$ passe par les points A et H ;

— les tangentes à $\mathcal{C}_g$ aux points d'abscisse -2 et 1 sont horizontales.

1. $f(x) = a(x + 4)(x + 2)(x - 3)$. En effet, f s'annule pour $x = -4$, $x = -2$ et $x = 3$.

De plus, $f(0) = -3$ donc $a \times 4 \times 2 \times (-3) = -3$, soit $a = \frac{1}{8}$. Ainsi :

$$f(x) = \frac{1}{8}(x + 4)(x + 2)(x - 3).$$

2. $g(x) = (x + 4)(ax^2 + bx + c)$. En effet, $g(-4) = 0$.

De plus, $g(0) = -1$ donc $4c = -1$, soit $c = -\frac{1}{4}$.

Ainsi, $g'(x) = ax^2 + bx - \frac{1}{4} + (x + 4)(2ax + b)$ (on dérive le produit).

Or, $g'(-2) = 0$ donc $4a - 2b - \frac{1}{4} + 2(-4a + b) = 0$, soit $-4a = \frac{1}{4}$. Donc $a = -\frac{1}{16}$.

De plus, $g'(1) = 0$ donc $-\frac{1}{16} + b - \frac{1}{4} + 5\left(-\frac{1}{8} + b\right) = 0$, soit $6b = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{5}{8} = \frac{15}{16}$. Donc $c = \frac{5}{32}$. Ainsi :

$$\boxed{g(x) = (x + 4)\left(-\frac{1}{16}x^2 + \frac{5}{32}x - \frac{1}{4}\right)}$$

3. L'abscisse d'un point d'intersection des deux courbes vérifie l'équation $f(x) = g(x)$.

$f(x) = g(x)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{8}(x + 4)(x + 2)(x - 3) = (x + 4)\left(-\frac{1}{16}x^2 + \frac{5}{32}x - \frac{1}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{8}\left(x^2 - x - 6\right) = -\frac{1}{16}x^2 + \frac{5}{32}x - \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 24 = -2x^2 + 5x - 8$ on a multiplié par 32

$\Leftrightarrow 6x^2 - 9x - 16 = 0.$

$$\Delta = 81 - 4 \times 6 \times (-16) = 465.$$

Les abscisses des deux points d'intersection sont donc :

$$x_1 = \frac{9 - \sqrt{465}}{12} \qquad ; \; x_2 = \frac{9 + \sqrt{465}}{12}.$$

Exercice n°6

1. $f(x) = 3x - 1$ donc $f'(x) = 3$.
2. $f(x) = 5x^2 + 3x - 1$ donc $f'(x) = 10x + 3$.
3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ donc $f'(x) = x^2 - 10x + 3$.
4. $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ donc $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}$ donc $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$.
6. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{3}\sqrt{x}$ donc $f'(x) = -x + 3 - \frac{1}{6\sqrt{x}}$.

Exercice n°7

Calcul de la dérivée.

1. $f(x) = 2x\sqrt{x}$. On pose :

$u(x) = 2x$ $\qquad$ $v(x) = \sqrt{x}$

$u'(x) = 2$ $\qquad$ $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

On a alors :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
&= 2\sqrt{x} + 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= 2\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}} \\
&= 2\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\
&= 2\sqrt{x} + \sqrt{x} \\
f'(x) &= 3\sqrt{x}.
\end{aligned}$$

2. $f(x) = \dfrac{3x-1}{4x+5}$. On pose :

$u(x) = 3x - 1$ $\qquad$ $v(x) = 4x + 5$

$u'(x) = 3$ $\qquad$ $v'(x) = 4$

On a alors :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\
&= \frac{3(4x+5) - 4(3x-1)}{(4x+5)^2} \\
&= \frac{12x + 15 - 12x + 4}{(4x+5)^2} \\
f'(x) &= \frac{19}{(4x+5)^2}.
\end{aligned}$$

3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - x}{x^2+1}$. On pose :

$u(x) = \sqrt{x} - x$ $\qquad$ $v(x) = x^2 + 1$

$u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1$ $\qquad$ $v'(x) = 2x$

On a alors :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\
&= \frac{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) \times (x^2+1) - (\sqrt{x} - x) \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} \\
&= \frac{\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}} - x^2 - 1 - 2x\sqrt{x} + 2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \\
&= \frac{\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}} + x^2 - 2x\sqrt{x} - 1}{\left(x^2+1\right)^2} \\
&= \frac{\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{2x^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{4x^2}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\left(x^2+1\right)^2} \\
&= \frac{\dfrac{2x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 3x^2 + 1}{2\sqrt{x}}}{\left(x^2+1\right)^2} \\
f'(x) &= \frac{2x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 3x^2 + 1}{2\sqrt{x}\left(x^2+1\right)^2}.
\end{aligned}$$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$. On pose :

$u(x) = x^2 - 3x + 1$ $\qquad$ $v(x) = x - 3$

$u'(x) = 2x - 3$ $\qquad$ $v'(x) = 1$

On a donc :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\
&= \frac{(2x-3)(x-3) - (x^2 - 3x + 1) \times 1}{(x-3)^2} \\
&= \frac{2x^2 - 6x - 3x + 9 - x^2 + 3x - 1}{(x-3)^2} \\
f'(x) &= \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}.
\end{aligned}$$

5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + \dfrac{1}{x}}$.

On commence par simplifier l'écriture de $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\frac{x^2+1}{x}} \\
&= \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}.
\end{aligned}$$

On pose alors :

$u(x) = x\sqrt{x}$ $\qquad$ $v(x) = x^2 + 1$

$u'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad$ $v'(x) = 2x$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \\
&= \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \\
&= \frac{3}{2}\sqrt{x}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\
&= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(x^2+1) - x\sqrt{x} \times 2x}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{\frac{3}{2}x^2\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x} - 2x^2\sqrt{x}}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\sqrt{x}}{(x^2+1)^2} \\
f'(x) &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}\left(3 - x^2\right)}{(x^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

Exercice n°8

Pour chacune des fonctions f et g,

- trouver son domaine de définition ;
- trouver sa dérivée ;
- trouver son sens de variations sur son domaine de définition ;
- donner le signe de la fonction sur son domaine de définition.

1. $f(x) = (3x+2)\sqrt{x}$.
   — Le domaine de définition de f est : $\mathcal{D}_f = [0;+\infty[$.
   — f est de la forme uv avec :

$u(x) = 3x+2$ $\qquad$ $v(x) = \sqrt{x}$

$u'(x) = 3$ $\qquad$ $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 3\sqrt{x} + (3x+2)\times\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 3\sqrt{x} + \frac{3x+2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{3x+2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{6x+3x+2}{2\sqrt{x}} \\ f'(x) &= \frac{9x+2}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

   — $f'(x) > 0 \iff 9x+2 > 0$ car $2\sqrt{x} > 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
   Ainsi, $f'(x) > 0 \iff x > -\dfrac{2}{9}$, d'où le tableau suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	

— D'après le tableau de variation de f, on peut dire que $f(x) \geqslant 0$ sur $0+\infty$.

2. $g(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x}$.
   — Le domaine de définition de g est $\mathcal{D}_g =]0;+\infty[$.
   — g est de la forme uv avec :

$u(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $v(x) = \sqrt{x}$

$u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad$ $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= -\frac{1}{x^2}\sqrt{x} + \left(1+\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= -\frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{x+1}{x}\times\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= -\frac{\sqrt{x}}{x\times\sqrt{x}\times\sqrt{x}} + \frac{x+1}{2x\sqrt{x}} \\ &= -\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{x+1}{2x\sqrt{x}} \\ g'(x) &= \frac{x-1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

   — $g'(x) > 0 \iff x-1 > 0 \iff x > 1$ car $2x\sqrt{x} > 0$ sur $\mathcal{D}_g$.
   On a alors le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

   — D'après le tableau de variations de g, on peut dire que $g(x) \geqslant 2$ sur $]0;+\infty[$, donc $g(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$.

Exercice n°9

Pour chacune des fonctions suivantes,
— donner son domaine de définition ;
— trouver sa dérivée ;
— en déduire ses variations sur son domaine de définition.

1. $f(x) = \dfrac{3x-4}{5x-2}$.
   — $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{2}{5}\right\}$.
   — f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :

$u(x) = 3x-4$ $\qquad$ $v(x) = 5x-2$

$u'(x) = 3$ $\qquad$ $v'(x) = 5$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\ &= \frac{3(5x-2) - 5(3x-4)}{(5x-2)^2} \\ &= \frac{15x - 6 - 15x + 20}{(5x-2)^2} \\ f'(x) &= \frac{14}{(5x-2)^2}. \end{aligned}$$

   — $f'(x) > 0$ pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$ donc :

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

2. $g(x) = \dfrac{5x-3}{x^2-x-2}$.
   — Une racine évidente de x^2-x-2 est $x_1 = 2$. De plus, $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$ donc $2x_2 = -2$, soit $x_2 = -1$.
   Ainsi, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}\setminus\{-1\ ;\ 2\}$.
   — f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :

$u(x) = 5x-3$ $\qquad$ $v(x) = x^2-x-2$

$u'(x) = 5$ $\qquad$ $v'(x) = 2x-1$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\ &= \frac{5(x^2-x-2) - (5x-3)(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} \\ &= \frac{5x^2 - 5x - 10 - 10x^2 + 5x + 6x - 3}{(x^2-x-2)^2} \\ g'(x) &= \frac{-5x^2+6x-13}{(x^2-x-2)^2}. \end{aligned}$$

— $g'(x)$ est du signe de $-5x^2+6x-13$, dont le discriminant est :

$$\Delta = 36 - 260 < 0.$$

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$		$-$	
$g(x)$		$\searrow$	‖	$\searrow$	‖	$\searrow$	

3. $h(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}$.

— x^2-3x+2 possède $\alpha = 1$ comme racine évidente, donc la seconde racine est $\beta = 2$.
Ainsi, $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{1\ ;\ 2\}$.

— f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :

$u(x) = x^2+x+1$ $\qquad$ $v(x) = x^2-3x+2$
$u'(x) = 2x+1$ $\qquad$ $v'(x) = 2x-3$

D'où :

$$\begin{aligned}
&h'(x)\\
&= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}\\
&= \frac{(2x+1)(x^2-3x+2)-(x^2+x+1)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}\\
&= \frac{2x^3-6x^2+4x+x^2-3x+2-(2x^3-3x^2+2x^2-3x+2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}\\
&= \frac{2x^3-5x^2+x+2-2x^3+x^2+x+3}{(x^2-3x+2)^2}
\end{aligned}$$

$$h'(x) = \frac{-4x^2+2x+5}{(x^2-3x+2)^2}.$$

— $h'(x)$ est du signe de $-4x^2+2x+5$, dont le discriminant est :

$$\Delta = 4 + 80 = 84.$$

Ses deux racines sont donc :

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{84}}{-8} = \frac{-2+2\sqrt{21}}{-8} = \frac{1-\sqrt{21}}{4} \approx -0{,}9 < \alpha$$

et

$$x_2 = \frac{-2-\sqrt{84}}{-8} = \frac{-2-2\sqrt{21}}{-8} = \frac{1+\sqrt{21}}{4} \approx 1{,}4 \in]\alpha;\beta[=]1;2[.$$

On a alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		$\alpha=1$		x_2		$\beta=2$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	‖	$\nearrow$		$\searrow$	‖	$\searrow$	

Exercice n°10

L'entreprise KIHARNAK fabrique de la poudre de fée dont tout le monde pourrait se passer et qui pourtant a un succès fou.
Son coût de production est donné par la fonction $C(q) = q^3 - 2q^2 + 10q + 150$, où q représente la quantité (en tonne) de poudre.
On définit le *coût unitaire*, ou *coût moyen*, par la fonction $CM(q) = \dfrac{C(q)}{q}$.

1. $CM(q) = \dfrac{C(q)}{q} = \dfrac{q^3-2q^2+10q+150}{q} = q^2-2q+10+\dfrac{150}{q}$.
$C_m(q) = C'(q) = 3q^2-4q+10$.

2. $CM'(q) = 2q - 2 - \dfrac{150}{q^2} = \dfrac{2q^3-2q^2-150}{q^2} = \dfrac{2}{q^2}(q^3-q^2-75)$.
$\dfrac{2}{q^2} > 0$ donc $CM'(q)$ est du signe du polynôme $P(q) = q^3-q^2-75$.
$P'(q) = 3q^2-2q = q(3q-2)$ donc $q=0$ et $q=\dfrac{2}{3}$ sont les deux racines de P.
On en déduit le tableau suivant :

q	0		$\frac{2}{3}$		5		$+\infty$
$P'(q)$		$-$	0	$+$			
$P(q)$	-75	$\searrow$	$\approx -75{,}1$	$\nearrow$	25	$\nearrow$	

Intuitivement, comme il n'y a pas de valeurs interdites entre $\dfrac{1}{3}$ et 5, on peut supposer qu'il existe une valeur de q, notée α, comprise entre $\dfrac{2}{3}$ et 5, telle que $P(\alpha) = 0$.