Le second degré

Forme canonique - Corrigé

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

En utilisant les identités remarquables, on obtient :

1. $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2\times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9.$
2. $(3y-4)^2 = (3y)^2 - 2\times 3y \times 4 + 4^2 = 9y^2 - 24y + 16.$
3. $(-u+\sqrt{7})^2 = u^2 - 2\sqrt{7}u + 7.$
4. $(-\sqrt{3}t - \sqrt{15})^2 = 3t^2 + 2\sqrt{45}t + 15 = 3t^2 + 6\sqrt{5}t + 15.$
5. $\left(\frac{3}{2}z+2\right)^2 = \frac{9}{4}z^2 + 3z + 4.$
6. $\left(\frac{2}{5}v - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{25}v^2 - \frac{8}{15}v + \frac{4}{9}.$
7. $(x-3)^2 + 7 = x^2 - 6x + 9 + 7 = x^2 - 6x + 16.$
8. $2(x+3)^2 - 5 = 2x^2 + 12x + 18 - 5 = 2x^2 + 12x + 13.$
9. $-(x+\sqrt{2})^2 + 6 = -x^2 - 2\sqrt{2}x - 2 + 6 = -x^2 - 2\sqrt{2}x + 4.$
10. $\sqrt{3}(2x-1)^2 - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}x^2 - 4\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}x^2 - 4\sqrt{3}x - \sqrt{3}.$
11. $\frac{3}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{16} + 1 = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{19}{16}.$
12. $\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{9} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{4}{9}\right) - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}x^2 + \frac{10}{9}x + \frac{8}{9}.$

Exercice 2 :

En utilisant les identités remarquables, on obtient :

1. $x^2 - 25 = (x-5)(x+5).$
2. $4t^2 - 9 = (2t-3)(2t+3).$
3. $\frac{2}{9}y^2 - \frac{4}{5} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}y - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{3}y + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}y - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{3}y + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$
4. $u^2 + 6u + 9 = (u+3)^2.$
5. $9v^2 - 12v + 4 = (3v-2)^2.$
6. $2z^2 + 10\sqrt{2}z + 25 = (\sqrt{2}z + 5)^2.$

Exercice 3 :

Résolution d'équations.

1. $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ainsi, $S = \{0\}$.

$\boxed{2}$ $x^2 = 17 \Leftrightarrow x = \sqrt{17}$ ou $x = -\sqrt{17}$. Ainsi, $S = \left\{-\sqrt{17}; \sqrt{17}\right\}$.

$\boxed{3}$ $(2t+10)^2 \Leftrightarrow 2t+10 = 0 \Leftrightarrow t = -5$. Ainsi, $S = \{-5\}$.

$\boxed{4}$ $(-\sqrt{3}y+6)^2 = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}y+6 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. Ainsi, $S = \left\{2\sqrt{3}\right\}$.

$\boxed{5}$ $2u^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow u^2 = 5 \Leftrightarrow u = \sqrt{5}$ ou $u = -\sqrt{5}$. Ainsi, $S = \left\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right\}$.

$\boxed{6}$ $-\dfrac{3}{4}v^2 + \dfrac{4}{15} = 0 \Leftrightarrow v^2 = \dfrac{16}{45} \Leftrightarrow v = \sqrt{\dfrac{16}{45}}$ ou $v = -\sqrt{\dfrac{16}{45}}$. Ainsi, $S = \left\{-\dfrac{4\sqrt{5}}{3}; \dfrac{4\sqrt{5}}{3}\right\}$.

Exercice 4 :

$\boxed{1}$ **Méthode 1 :** $x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1$. Ainsi, $a = 1$, $\alpha = -1$ et $\beta = 1$.
Méthode 2 : Posons, $P(x) = x^2+2x+2$. Dans ce cas, $a = 1$, $b = 2$ et $c = 2$. Or, $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.
Donc, $\alpha = -\dfrac{2}{2} = -1$ et $\beta = (-1)^2+2\times(-1)+2 = 1$. Par conséquent, $P(x) = (x+1)^2+1$.

$\boxed{2}$ **Méthode 1 :** $x^2+4x-1 = x^2+4x+4-4-1 = (x+2)^2-5$. Ainsi, $a = 1$, $\alpha = -2$ et $\beta = -5$.
Méthode 2 : Posons, $P(x) = x^2+4x-1$. Dans ce cas, $a = 1$, $b = 4$ et $c = -1$. Or, $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$. Donc, $\alpha = -\dfrac{4}{2} = -2$ et $\beta = (-2)^2+4\times(-2)-1 = -5$. Par conséquent, $P(x) = (x+2)^2-5$.

$\boxed{3}$ $-x^2+4x-5 = -x^2+4x-4+4-5 = -(x-2)^2-1$. Ainsi, $a = -1$, $\alpha = 2$ et $\beta = -1$.

$\boxed{4}$ $4x^2-8x-3 = 4x^2-8x+4-4-3 = 4(x-1)^2-7$. Ainsi, $a = 4$, $\alpha = 1$ et $\beta = -7$.

$\boxed{5}$ $-9x^2+36x+4 = -9x^2+36x-36+36+4 = -9(x^2-4x+4)+40 = -9(x-2)^2+40$. Ainsi, $a = -9$, $\alpha = 2$ et $\beta = 40$.

$\boxed{6}$ $-2x^2-20x-17 = -2x^2-20x-50+50-17 = -2(x+5)^2+33$. Ainsi, $a = -2$, $\alpha = -5$ et $\beta = 33$.

$\boxed{7}$ $x^2+3x+\dfrac{1}{4} = x^2+2\times\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{4}-\dfrac{9}{4}+\dfrac{1}{4} = \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-2$. Ainsi, $a = 1$, $\alpha = -\dfrac{3}{2}$ et $\beta = -2$.

$\boxed{8}$ $\dfrac{1}{4}x^2+x-1 = \dfrac{1}{4}\left(x^2+4x+4\right)-2 = \dfrac{1}{4}(x+2)^2-2$. Ainsi, $a = \dfrac{1}{4}$, $\alpha = -2$ et $\beta = -2$.

$\boxed{9}$ Posons, $P(x) = \dfrac{2}{9}x^2+8x+\dfrac{1}{7}$. Dans ce cas, $a = \dfrac{2}{9}$, $b = 8$ et $c = \dfrac{1}{7}$. Or, $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$. Donc, $\alpha = -\dfrac{8}{\frac{4}{9}} = -18$ et $\beta = \dfrac{2}{9}(-18)^2+8\times(-18)+\dfrac{1}{7} = -\dfrac{503}{7}$. Par conséquent, $P(x) = \dfrac{2}{9}(x+18)^2-\dfrac{503}{7}$.

$\boxed{10}$ Posons, $P(x) = -\dfrac{9}{8}x^2-\dfrac{1}{2}x-4$. Dans ce cas, $a = -\dfrac{9}{8}$, $b = -\dfrac{1}{2}$ et $c = -4$. Or, $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.
Donc, $\alpha = -\dfrac{-\frac{1}{2}}{-\frac{9}{4}} = -\dfrac{2}{9}$ et $\beta = -\dfrac{9}{8}\left(-\dfrac{2}{9}\right)^2-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{-2}{9}-4 = -\dfrac{71}{18}$.
Par conséquent, $P(x) = -\dfrac{9}{8}\left(x+\dfrac{2}{9}\right)^2-\dfrac{71}{18}$.

$\boxed{11}$ Posons, $P(x) = \dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{3}{4}$. Dans ce cas, $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{2}{3}$ et $c = \dfrac{3}{4}$. Or, $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$. Donc,

$\alpha = -\frac{2}{3}$ et $\beta = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \times \frac{-2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{19}{36}$.

Par conséquent, $P(x) = \frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{19}{36}$.

12 Posons, $P(x) = -\frac{4}{5}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{6}{7}$. Dans ce cas, $a = -\frac{4}{5}$, $b = -\frac{5}{6}$ et $c = -\frac{6}{7}$. Or, $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.

Donc, $\alpha = -\frac{-\frac{5}{6}}{-\frac{8}{5}} = -\frac{25}{48}$ et $\beta = -\frac{4}{5}\left(-\frac{25}{48}\right)^2 - \frac{5}{6} \times \left(-\frac{25}{48}\right) - \frac{6}{7} = -\frac{2581}{4032}$.

Par conséquent, $P(x) = -\frac{4}{5}\left(x+\frac{25}{48}\right)^2 - \frac{2581}{4032}$.

Exercice 5 :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$.

1 $x^2+3x+\lambda = x^2+2\times\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+\lambda = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\lambda$. Ainsi, $a=1$, $\alpha=-\frac{3}{2}$ et $\beta=-\frac{9}{4}+\lambda$.

2 $\frac{1}{4}x^2+\lambda x-2 = \frac{1}{4}\left(x^2+2\times 2\lambda x+(2\lambda)^2\right)-\lambda^2-2 = \frac{1}{4}(x+2\lambda)^2-\lambda^2-2$. Ainsi, $a=\frac{1}{4}$, $\alpha=-2\lambda$ et $\beta=-2-\lambda^2$.

3 $\lambda x^2+8x+5 = \lambda\left(x^2+2\times\frac{4}{\lambda}x+\frac{16}{\lambda^2}\right)-\frac{16}{\lambda}+5 = \lambda\left(x+\frac{4}{\lambda}\right)^2-\frac{16}{\lambda}+5$. Ainsi, $a=\lambda$, $\alpha=-\frac{4}{\lambda}$ et $\beta=-\frac{16}{\lambda}+5$.

4 $-3x^2-\lambda x+2 = -3\left(x^2+2\times\frac{\lambda}{6}x+\frac{\lambda^2}{36}\right)+\frac{1}{12}\lambda^2+2 = -3\left(x+\frac{\lambda}{6}\right)^2+\frac{1}{12}\lambda^2+2$. Ainsi, $a=-3$, $\alpha=-\frac{\lambda}{6}$ et $\beta=\frac{1}{12}\lambda^2+2$.

5 $\frac{1}{2}x^2+\frac{2\lambda}{3}x+\frac{3\lambda}{4} = \frac{1}{2}\left(x^2+2\times\frac{2\lambda}{3}x+\frac{4\lambda^2}{9}\right)-\frac{2\lambda^2}{9}+\frac{3\lambda}{4} = \frac{1}{2}\left(x+\frac{2\lambda}{3}\right)^2-\frac{2\lambda^2}{9}+\frac{3\lambda}{4}$. Ainsi, $a=\frac{1}{2}$, $\alpha=-\frac{2\lambda}{3}$ et $\beta=-\frac{2\lambda^2}{9}+\frac{3\lambda}{4}$.

6 $-\frac{4}{5}x^2-\frac{5}{6}\lambda x = -\frac{4}{5}\left(x^2+2\times\frac{25}{48}\lambda x+\frac{25^2}{48^2}\lambda^2\right)+\frac{125}{576}\lambda^2 = \frac{4}{5}\left(x+\frac{25}{48}\lambda\right)^2+\frac{125}{576}\lambda^2$. Ainsi, $a=-\frac{4}{5}$, $\alpha=-\frac{25}{48}\lambda$ et $\beta=\frac{125}{576}\lambda^2$.

Exercice 6 :

1 **Méthode 1 :** La fonction f est représentée par $\mathscr{C}_3$, car $f(0)=0$. Ce n'est pas le cas des autres fonctions.
Méthode 2 : $0,5$ est le coefficient de x^2. $0,5$ étant positif la parabole représentant cette fonction est orientée vers le haut.
Or, $0,5x^2 = 0,5(x-0)^2+0$ est une forme canonique. On déduit alors que f admet un minimum 0, atteint lorsque $x=0$.
Par conséquent, c'est la courbe $\mathscr{C}_3$ qui représente la fonction f.

2 **Méthode 1 :** La fonction h est représentée par $\mathscr{C}_2$, car $f(1)=-1$. Ce n'est pas le cas des autres

fonctions.

Méthode 2 : L'expression de h est donnée sous la forme canonique.
$a = 1$, a étant positif la parabole représentant cette fonction est orientée vers le haut.
Par ailleurs h admet un minimum -1, atteint lorsque $x = 1$.
Par conséquent, c'est la courbe $\mathscr{C}_2$ qui représente la fonction h.

3 L'expression de g est donnée sous la forme canonique.
$a = 1,5$, a étant positif la parabole représentant cette fonction est orientée vers le haut.
Par ailleurs g admet un minimum 2, atteint lorsque $x = 0$.
Le sens de variations est alors donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

Par conséquent, c'est la courbe $\mathscr{C}_1$ qui représente la fonction g.

4 L'expression de k est donnée sous la forme canonique.
$a = -0,1$, a étant négatif la parabole représentant cette fonction est orientée vers le bas.
Par ailleurs k admet un maximum 2, atteint lorsque $x = 0$.
Le sens de variations est alors donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$k(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	

Par conséquent, c'est la courbe $\mathscr{C}_4$ qui représente la fonction k.

Exercice 7 :

1 La fonction f est représentée par $\mathscr{C}_1$. En effet, le coefficient $a = -1$ étant négatif, la parabole représentant cette fonction est orientée vers le bas. En outre, cette courbe coupe l'axe des abscisses en -1 et 2. Autrement dit, -1 et 2 sont les deux racines de f.

2 La fonction g est représentée par $\mathscr{C}_4$. En effet, le coefficient $a = 1$ étant positif, la parabole représentant cette fonction est orientée vers le haut. En outre, cette courbe coupe l'axe des abscisses en 0 et 3. Autrement dit, 0 et 3 sont les deux racines de g.

3 La fonction h est représentée par $\mathscr{C}_3$. En effet, le coefficient $a = 1$ étant positif, la parabole représentant cette fonction est orientée vers le haut. En outre, cette courbe coupe l'axe des abscisses en -3 et 1. Autrement dit, -3 et 1 sont les deux racines de h.

4 La fonction k est représentée par $\mathscr{C}_2$. En effet, le coefficient $a = 2$ étant positif, la parabole représentant cette fonction est orientée vers le haut. En outre, cette courbe coupe l'axe des abscisses en -1 et 2. Autrement dit, -1 et 2 sont les deux racines de k.

Exercice 8 :

1 Selon la représentation graphique, les deux racines de f sont $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$. Alors que la fonction g a pour racines, $x_1 = -2$ et $x_2 = 4$.

2 Par lecture graphique, on obtient $f(0) = 2$.

Or, $f(x) = a(x+3)(x-1)$. Donc, $-3a = 2$. Ainsi, $a = -\dfrac{2}{3}$.

Par conséquent, $f(x) = -\dfrac{2}{3}(x+3)(x-1)$.

$\boxed{3}$ Par lecture graphique, on obtient $g(0) = -4$.

Or, $g(x) = a(x+2)(x-4)$. Donc, $-8a = -4$. Ainsi, $a = \dfrac{1}{2}$.

Par conséquent, $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+2)(x-4)$.