1re Spé Maths
Entraînement

Produit Scalaire

Corrigés

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

1. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\dfrac{39}{2}$. En effet,
$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 &= (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2\\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}.\end{aligned}$$
Autrement dit, $100=64+25+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$. D'où le résultat.

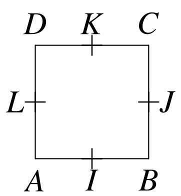
2. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=45$. En effet,
$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\\ &\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{u}\|^2=2\|\overrightarrow{u}\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\\ &\Leftrightarrow 4\|\overrightarrow{u}\|^2=2\|\overrightarrow{u}\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{u}\|^2=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}.\end{aligned}$$
Or, $\|\overrightarrow{u}\|^2=(3\sqrt{5})^2=45$. D'où le résultat.

3. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=30$. En effet, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=1\times6+2\times12=30$.

4. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-5$. En effet, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\times5\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-5$.

5. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-5$. En effet,
$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\\ &\Leftrightarrow \|-\overrightarrow{u}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+\|-2\overrightarrow{u}\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{u}\|^2=5\|\overrightarrow{u}\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\\ &\Leftrightarrow -4\|\overrightarrow{u}\|^2=2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}.\\ &\Leftrightarrow -2\|\overrightarrow{u}\|^2=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}.\end{aligned}$$
Or, $\|\overrightarrow{u}\|^2=64$. D'où le résultat.

Exercice 2 :



On considère le carré $ABCD$ ci-dessous de côté 1 et I, J, K et L les milieux des côtés.
Associer chacun des produits scalaires avec le calcul ou le résultat auquel il est égal.

- $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BL}=BC\times BJ$.
- $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{ID}=-IB\times IA$.
- $\overrightarrow{KJ}\cdot\overrightarrow{KL}=0$.
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{LK}=AB\times AI$.

Exercice 3 :

1. $\overrightarrow{n_1}\binom{65}{-12}$ est un vecteur normal de la droite (d_1), d'équation $65x-12y+6=0$.

2. $\overrightarrow{n_3}\binom{-3}{1}$ est un vecteur normal de la droite (d_2), d'équation $y=3x-2$.

3 $\overrightarrow{n_5}\binom{-8}{1}$ est un vecteur normal de la droite (d_3), d'équation $-8x = -y + 2$.

4 $\overrightarrow{n_6}\binom{-9}{2}$ est est un vecteur normal de la droite (AB) passant par les points $A(4\,;\,3)$ et $B(6\,;\,12)$.

Exercice 4 :

(d), d'équation $2x - 8y + 28 = 0$ est la droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}\binom{-1}{4}$ et passant par $T(14\,;\,7)$. En effet, $\overrightarrow{n}\binom{-1}{4}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n'}\binom{2}{-8}$ donc est normal à (d). En outre, $2x_T - 8y_T + 28 = 2 \times 14 - 8 \times 7 + 28 = 0$.

Exercice 5 :

1 $\mathscr{C}_1$ est le cercle de centre $A(2\,;\,5)$ et de rayon 3.

2 $\mathscr{C}_2$ est le cercle de centre $B(-3\,;\,7)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

Exercice 6 :

1 (CD) et (AB) ne sont pas perpendiculaires. En effet,
- $\overrightarrow{AB}\binom{-2}{8}$ est un vecteur directeur de (AB).
- $\overrightarrow{AB}\binom{15}{4}$ est un vecteur directeur de (AB).
- Et, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \neq 0$.

2 (EF) et (d_1) sont perpendiculaires. En effet,
- $\overrightarrow{u}\binom{-2}{1}$ est un vecteur directeur de (d_1).
- $\overrightarrow{EF}\binom{2}{4}$ est un vecteur directeur de (AB).
- Et, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$.

3 (d_2) et (d_3) sont perpendiculaires. En effet,
- $\overrightarrow{u}\binom{8}{4}$ est un vecteur directeur de (d_2).
- $\overrightarrow{v}\binom{1}{-2}$ est un vecteur directeur de (d_3).
- Et, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Exercice 7 :

On considère les points $A(1\,;\,3)$, $B(3\,;\,1)$, $C(-2\,;\,-2)$, $D(13\,;\,-5)$ et $E(4\,;\,3)$.

1 (AC) et (AB) ne sont pas perpendiculaires.

2 Même question pour :
(a) (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
(b) (BE) et (CD) ne sont pas perpendiculaires.

Exercice 8 :

1 Si $\|\overrightarrow{u}\| = 5$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$ et $\cos(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = 0,1$ alors :
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = 5 \times 2 \times 0,1 = 1$.

2 Si $\|\overrightarrow{u}\| = 23$, $\|\overrightarrow{v}\| = 11$ et $\cos(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = 0,93$ alors :
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = 23 \times 11 \times 0,93 = 235,29$.

3 Si $\|\overrightarrow{u}\| = 5$, $\|\overrightarrow{v}\| = 8$ et $(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = \dfrac{\pi}{6}\ (2\pi)$, alors :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}.$$

4 Si $\|\overrightarrow{u}\| = 7$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$ et $(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = \dfrac{5\pi}{3}\ (2\pi)$ alors :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 7\times 2\times\frac{1}{2} = 7.$$

5 Si $\|\overrightarrow{u}\| = 12$, $\|\overrightarrow{v}\| = 6$ et $(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = -\dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$, alors :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 12\times 6\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 36\sqrt{2}.$$

6 Si $\|\overrightarrow{u}\| = 9$, $\|\overrightarrow{v}\| = 6$ et $\overrightarrow{u} = -1{,}5\overrightarrow{v}$, alors :
$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos(\pi) = 9\times 6\times(-1) = -54.$

Exercice 9 :

1 Si $\|\overrightarrow{a}\| = \dfrac{5}{6}$, $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$ et $\left(\overrightarrow{a}\,;\overrightarrow{b}\right) = -\dfrac{5\pi}{6}\ (2\pi)$, alors
$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\| \times \left\|\overrightarrow{b}\right\| \times \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{8}\times(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{15}{96}.$$

2 Si $\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{2}$, $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = 6$ et $\left(\overrightarrow{a}\,;\overrightarrow{b}\right) = \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$, alors :

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\| \times \left\|\overrightarrow{b}\right\| \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\times 6\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 6.$$

3 Si $\|\overrightarrow{a}\| = 2\sqrt{2}$, $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = \sqrt{8}$ et $\left(\overrightarrow{a}\,;\overrightarrow{b}\right) = \pi\ (2\pi)$, alors :
$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\| \times \left\|\overrightarrow{b}\right\| \times \cos(\pi) = 2\sqrt{2}\times\sqrt{8}\times(-1) = -8.$$

4 Si $\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{2}+1$ et $\overrightarrow{b} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{a}$, alors
$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\| \times \left\|\overrightarrow{b}\right\| \times \cos(0) = (\sqrt{2}+1)\times\sqrt{3}\times 1 = \sqrt{6}+\sqrt{3}.$$

Exercice 10 :

On considère un triangle ABC avec $AB = 5$ et $BC = 6$ et $\widehat{ABC} = 60°$.

1 Faire une figure.

2 Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

3 Calculer $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

Exercice 11 :

On considère trois points $R(-1\ ;\ -2)$, $S(5\ ;\ -4)$ et $T(3\ ;\ 6)$.

1 (a) Calculer $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{RT}$, RS et RT.

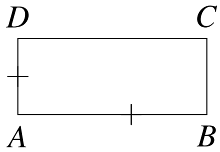
(b) En déduire $\cos\left(\widehat{SRT}\right)$ puis une mesure de $\widehat{SRT}$, arrondie à 0,01 degré près.

2 Déterminer de même une mesure de $\widehat{RST}$.

3 En déduire $\widehat{STR}$.

Exercice 12 :

On considère le rectangle $ABCD$ ci-dessous, tel que $AB = 5$ et $AD = 2$, E est le milieu de $[AD]$ et $F \in [AB]$ avec $AF = 3$.



En se plaçant dans un repère orthonormé adapté et à l'aide du produit scalaire, déterminer, à 0,01° près :

1 $\widehat{BAC}$

2 $\widehat{DFB}$

3 $\widehat{DFC}$

4 $\widehat{CEF}$