Fonctions de référence

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

1 Posons $f(x) = \sqrt{x}$. Soit a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$.
Comparons $f(a)$ et $f(b)$ en étudiant le signe de leur différence :

$$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = \frac{\sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

$a - b < 0$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$ donc $f(a) - f(b) < 0$ donc $f(a) < f(b)$.

2 .

(a) $3,79 < 3,8$.
La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc $\sqrt{3,79} < \sqrt{3,8}$.

(b) $4 < \pi + 1$.
La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc
$\sqrt{4} < \sqrt{\pi + 1}$ donc $2 < \sqrt{\pi + 1}$.

3 On examine les conditions d'existence : $x - 1 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq 1$.
On résout alors l'équation dans $[1\ ;\ +\infty[$.

$$\sqrt{x - 1} = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 2^2 \Leftrightarrow x - 1 = 4 \Leftrightarrow x = 5$$

Cette solution convient car elle appartient à $[1\ ;\ +\infty[$, donc $S = \{5\}$.

4 On examine les conditions d'existence : $x \geq 0$. On résout dans $[0\ ;\ +\infty[$.
$\sqrt{x} > 10^{-3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 > \left(10^{-3}\right)^2$ car la fonction carré est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$
$\Leftrightarrow x > 10^{-6}$
Ainsi, $S = \left]10^{-6}\ ;\ +\infty\right[$.

Exercice 2 :

1 On suppose que $0 \leq x \leq 1$.
On multiplie chaque membre par x : $x^2 \leq x$.
La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $\sqrt{x} \leq \sqrt{1}$ donc $\sqrt{x} \leq 1$.
On multiplie chaque membre par $\sqrt{x}$: $x \leq \sqrt{x}$

2 On suppose que $1 \leq x$.
On muliplie chaque membre par x : $x \leq x^2$.
La fonction racine carrée est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc $\sqrt{1} \leq \sqrt{x}$ donc $1 \leq \sqrt{x}$.
On muliplie chaque membre par $\sqrt{x}$: $\sqrt{x} \leq x$.

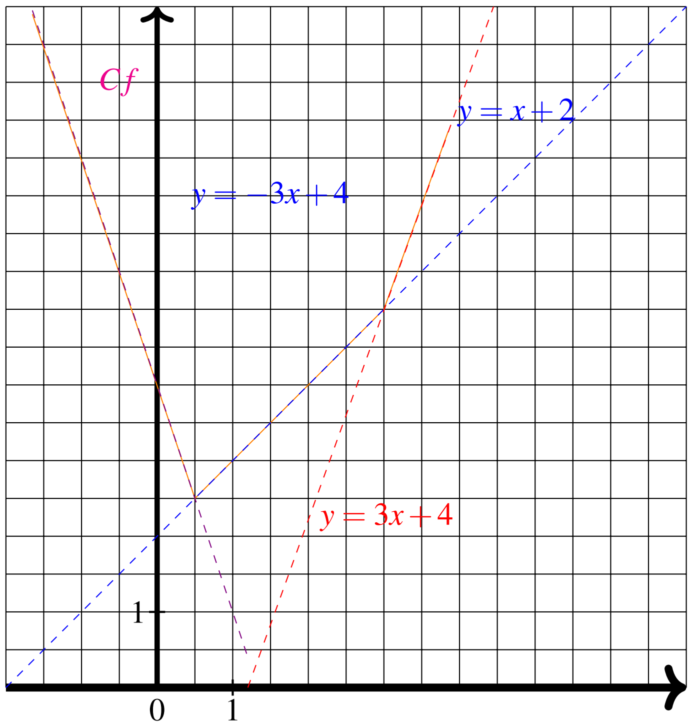
Exercice 3 :

1 La fonction $x \mapsto -x$ est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et la fonction $x \mapsto x$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2 En utilisant le tableau de signes, on obtient :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$\lvert x-3\rvert$	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$	
$\lvert -2x+1\rvert$	$-2x+1$	$2x-1$	$2x-1$	
$f(x)$	$-3x+4$	$x+2$	$3x-4$	

3 Voici la représentation graphique de la fonction f.



Exercice 4 :

1 Dans le cas où u est croissante sur I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. u étant croissante sur I, $u(a) < u(b)$.
De plus, $u(a) \geq 0$ et $u(b) \geq 0$ et la fonction racine carrée est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc $\sqrt{u(a)} \leq \sqrt{u(b)}$.
Ainsi, la fonction $\sqrt{u}$ est croissante sur I.
La démonstration est analogue lorsque u est décroissante sur I.

2 Soit f la fonction telle que : $f(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$.

(a) $\sqrt{x^2+3x-4}$ existe $\Leftrightarrow x^2+3x-4 \geq 0$.
On recherche les racines de $u(x) = x^2+3x-4$.
$\Delta = 3^2 - 4 \times 1(-4) = 25 = 5^2$.
Le trinôme a deux racines :
$x_1 = \dfrac{-3-5}{2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-3+5}{2} = 1$.
$u(x)$ est du signe de $a = 1$, soit positif sauf entre les racines.
Donc f est bien définie sur $]-\infty\ ;\ -4] \cup [1\ ;\ +\infty[$.

(b) $a > 0$ et $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3}{2}$ donc u est décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ -\dfrac{3}{2}\right]$ et croissante sur $\left[-\dfrac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$.
Donc f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ -4]$ et croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Exercice 5 :

1 Dans le cas où u est croissante sur I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. u étant croissante sur I, $u(a) \leq u(b)$.
De plus, u ne s'annule pas sur I et garde le même signe.

— Si $u(a) > 0$ et $u(b) > 0$, alors la fonction inverse étant décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, on a $\dfrac{1}{u(a)} \geq \dfrac{1}{u(b)}$. Ainsi, la fonction $\dfrac{1}{u}$ est décroissante sur I.

— Si $u(a) < 0$ et $u(b) < 0$, alors la fonction inverse étant décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$, on a : $\dfrac{1}{u(a)} \geq \dfrac{1}{u(b)}$. Ainsi, la fonction $\dfrac{1}{u}$ est décroissante sur I.

2 On pose $u(x) = -2x + 10$.
Ainsi, pour tout $x \neq 5$, $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.
On commence par étudier le sens de variation et le signe de la fonction u.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$u(x)$	$u(x) > 0$	↘	0	↘	$u(x) < 0$
$f(x)$		↗	‖	↗	

Sur $]-\infty\ ;\ 5[$ et sur $]5\ ;\ +\infty[$, u et $\dfrac{1}{u}$ ont des sens de variation contraires.

Exercice 6 :

Soit a et b deux réels positifs.

1 On pose $X = a^2 + b^2$ et $Y = (a+b)^2$. Comparer les réels X et Y en étudiant le signe de leur différence.

2 En utilisant le sens de variation de la fonction racine carrée, démontrer que $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$.

Exercice 7 :

1 $x \in]0\ ;\ 1[$ donc $x^2 < x < \sqrt{x}$.

2 $y > 1$ donc $\sqrt{y} < y < y^2$.

Exercice 8 :

Soit a un réel tel que $1 \leq a \leq 2$.

1 Comparer $a - 1$, $\sqrt{a-1}$ et $(a-1)^2$.

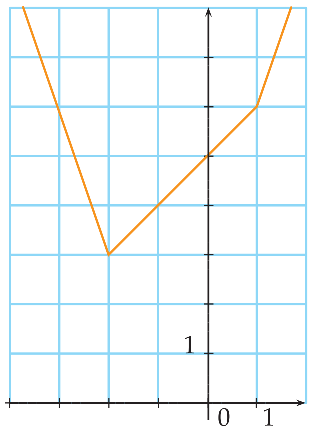
2 Comparer $2a - 1$, $\sqrt{2a-1}$ et $(2a-1)^2$.

Exercice 9 :

1 Voici les expressions de f :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$\lvert x-1\rvert$		$-x+1$		$-x+1$		$x-1$	
$2\lvert x+2\rvert$		$-2x-4$		$2x+4$		$2x+4$	
$f(x)$		$-3x-3$		$x+5$		$3x+3$	

2 Voici la représentation graphique



Exercice 10 :

Soit f la fonction telle que $f(x)=\sqrt{2x-18}$.

1 $f(x)$ existe $\Leftrightarrow 2x-18\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 9$

2 La fonction $x\mapsto 2x-18$ est croissante sur $[9\,;\,+\infty[$ donc f est croissante sur $[9\,;\,+\infty[$.

Exercice 11 :

1

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$u(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

2 $\dfrac{1}{u}$ est strictement croissante sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right[$.

Exercice 12 :

oit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\lvert x-2\rvert+\lvert x+1\rvert$.

1 Compléter le tableau suivant avec sur les différents intervalles, des expressions n'utilisant pas de valeurs absolues.

x	$-\infty$	-5	3	$+\infty$
$\lvert x-2\rvert$				
$\lvert x+1\rvert$				
$f(x)$				

2 Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3 Tracer la courbe C_f représentative de f dans un repère.

4 Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 5$. Vérifier à l'aide du graphique.

5 Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) < 4$. Vérifier à l'aide du graphique.