Le second degré

Discriminant - Corrigés

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

1 Pour déterminer les abscisses des éventuels points d'intersection de $\mathscr{P}$ avec la droite d'équation $y=-2$, il suffit de résoudre l'équation (E) : $-3x^2+7x-2=-2$.

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow -3x^2+7x=0\\ &\Leftrightarrow x(-3x+7)=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } -3x+7=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\frac{7}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi, 0 et $\frac{7}{3}$ sont les abscisses des deux points d'intersection de $\mathscr{P}$ et la droite d'équation $y=-2$.

2 Pour déterminer les abscisses des éventuels points d'intersection de $\mathscr{P}$ avec la droite d'équation $y=x+1$, il suffit de résoudre l'équation (E') : $-3x^2+7x-2=x+1$. Or,

$$(E')\Leftrightarrow -3x^2+6x-3=0.$$

Le discriminant de cette équation est égal à :

$$\Delta=b^2-4ac=6^2-4\times(-3)\times(-3)=36-36=0.$$

Δ étant nul, cette équation admet une seule solution : $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{2\times(-3)}=1$.
Ainsi, 1 est l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{P}$ et la droite d'équation $y=x+1$.

3 Pour déterminer les abscisses des éventuels points d'intersection de $\mathscr{P}$ avec la droite d'équation $y=2x-1$, il suffit de résoudre l'équation (E'') : $-3x^2+7x-2=2x-1$. Or,

$$(E'')\Leftrightarrow -3x^2+5x-2=0.$$

Le discriminant de cette équation est égal à :

$$\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times(-3)\times(-2)=25-24=1.$$

Δ étant positif, cette équation admet deux solutions :
$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-1}{2\times(-3)}=1$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+1}{2\times(-3)}=\frac{2}{3}$.
Ainsi, 1 et $\frac{2}{3}$ sont les abscisses du point d'intersection de $\mathscr{P}$ et la droite d'équation $y=2x-1$.

Exercice 2 :

1 $x^2-2x>0\Leftrightarrow x(x-2)>0$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $S=]-\infty\,;\,0[\cup]4\,;+\infty[$

$\boxed{2}$ $x^2-81<0 \Leftrightarrow (x-9)(x+9)<0$.

x	$-\infty$		-9		9		$+\infty$
$x+9$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-9$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-81		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $S=]-9\,;\,9[$.

$\boxed{3}$ $(x-1,5)(x+2,8)>0$.

x	$-\infty$		-2.8		1.5		$+\infty$
$x+2.8$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1.5$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1.5)(x+2.8)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $S=]-\infty\,;\,-2,8[\cup]1,5\,;+\infty[$.

$\boxed{4}$ Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2\geqslant 0$ et donc $x^2+20\geqslant 20>0$. Par consésent l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2+20<0$ est vide.

Exercice 3 :

$\boxed{1}$ $-6x^2+15x-4\leqslant 2 \Leftrightarrow -6x^2+15x-6\leqslant 0$.
Le discriminant du trinôme $-6x^2+15x-6$ est égal à :

$$\Delta=b^2-4ac=15^2-4\times(-6)\times(-6)=225-144=81.$$

Δ étant positif, ce trinôme admet deux racines :
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-15-9}{2\times(-6)}=2$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-15+9}{2\times(-6)}=\dfrac{1}{2}$.
Dès lors, on peut écrire le trinôme sous sa forme factorisée $-6x^2+15x-6=-6(x-2)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$.
Et, donc déterminer son signe :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-\frac{1}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$-6x^2+15x-6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $S=\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right]\cup[2\,;+\infty[$.

$\boxed{2}$ $-7x^2+4x-9>-8 \Leftrightarrow -7x^2+4x-1>0$.
Le discriminant du trinôme $-7x^2+4x-1$ est égal à :

$$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times(-7)\times(-1)=16-28=-12.$$

Δ étant négatif, ce trinôme n'admet pas de racines et il ne peut être factorisé dans $\mathbb{R}$.
$a=-7$, a étant négatif, la parabole représentant ce trinôme est orientée vers le bas et donc située en dessous de l'axe des abscisses. Autrement dit, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-7x^2+4x-1<0$. Par conséquent, $S=\varnothing$.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 7x + 15$.

$\boxed{1}$ Déterminons la forme canonique de f :

$$\begin{aligned}
f(x) &= -2x^2 - 7x + 15 \\
&= -2\left(x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{15}{2}\right) \\
&= -2\left(x^2 + 2 \times \frac{7}{4} \times x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} - \frac{15}{2}\right) \\
&= -2\left(\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{169}{16}\right) \\
&= -2\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{169}{8}.
\end{aligned}$$

$a = -2$, a étant négatif, la parabole représentant f est tournée vers le bas. Elle admet donc un maximum. Ainsi, le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{7}{4}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{169}{8}$	$\searrow$

$\boxed{2}$ Le discriminant du polynôme du second de degré f est égal à :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times (-2) \times 15 = 49 + 120 = 169.$$

Δ étant positif, ce trinôme admet deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7 - 13}{2 \times (-2)} = \dfrac{3}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7 + 13}{2 \times (-2)} = -5$.
Ainsi, $S = \left\{\dfrac{3}{2}\ ;\ -5\right\}$.

$\boxed{3}$ Le polynôme f admet deux racines, sa forme factorisée est donnée par :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 5).$$

$\boxed{4}$ Le tableau de signes de $f(x)$.

x	$-\infty$		-5		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x - \frac{3}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 5$		$-$	0	$+$		$+$	
$\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

5 Selon le tableau de signes dressé dans la question précédente l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est : $S =]-\infty\,;\,-5[\cup \left]\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.

6 $f(2) = -2\times 2^2 - 7\times 2 + 15 = -7$. Ainsi, -7 est l'image de 2 par la fonction f.

7 Pour savoir si -70 a des antécédents par la fonction f, il suffit de résoudre l'équation $f(x) = -70$.
Autrement dit, l'équation (*) : $-2x^2 - 7x + 85 = 0$
Le discriminant de cette équation est égal à :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4\times(-2)\times 85 = 49 + 680 = 729.$$

Δ étant positif, cette équation admet deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7-27}{2\times(-2)} = 5$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7+27}{2\times(-2)} = -\dfrac{17}{2}$.
Ainsi, 5 et $-\dfrac{17}{2}$ sont les antécédents de -70 par la fonction f.

8 Pour savoir si 25 a des éventuels antécédents par la fonction f, il suffit de résoudre l'équation $f(x) = 25$. Autrement dit, l'équation (**) : $-2x^2 - 7x - 10 = 0$.
Le discriminant de cette équation est égal à :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4\times(-2)\times(-10) = 49 - 80 = -31.$$

Δ étant négatif, cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$. Ainsi, 15 n'a pas d'antécédent par f.

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$.

1 (a) Dans ce cas, $a = 2$ et $b = -2$. Ainsi,

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2\times 2} = \frac{1}{2} \text{ et } \beta = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\times\left(\frac{1}{2}\right) - 4 = -\frac{9}{2}.$$

Par conséquent, la forme canonique de f est : $f(x) = 2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{2}$.

(b) En utilisant la trosième identité remarquable, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] \\ &= 2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \\ &= 2\left(x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right) \\ &= 2(x-2)(x+1). \end{aligned}$$

2 En utilisant la méthode la plus simple, répondre aux questions suivantes :

(a) $f(-1) = 2(-1-2)(-1+1) = 0$.

(b) Résolution d'équation :

$$\begin{aligned} f(x) = -4 &\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = -4 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $S = \{0\ ;\ 1\}$.

(c) Pour dresser le tabelau de variations de f, il suffit d'utiliser la forme canonique.
$a = 2$, a étant positif la parabole est tournée vers la haut. f admet donc un minimum. $\beta = -\dfrac{9}{2}$ est ce minimum, il est atteint lorsque $x = \alpha = \dfrac{1}{2}$. Ainsi,

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-\frac{9}{2}$	↗

(d) Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses, il suffit de résoudre l'équation $f(x) = 0$. Pour cela, le plus rapide est d'utiliser la forme factorisée. En effet,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 2\,(x-2)\,(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ ou } x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -1.. \end{aligned}$$

Ainsi, $S = \{-1\ ;\ 2\}$.

(e) Pour dresser le tableau de signes de f, le mieux esr d'utiliser la forme factorisée.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)\,(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(f) Pour déterminer les antécédants de -1 par la fonction f, il suffit de résoudre l'équation $f(x) = -1$. Autrement dit, l'équation (*) : $2x^2 - 2x - 3 = 0$.
Le discriminant de cette équation est égal à :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 4 + 24 = 28.$$

Δ étant positif, cette équation admet deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 - \sqrt{28}}{2 \times 2} = \dfrac{1 - \sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 + \sqrt{28}}{2 \times 2} = \dfrac{1 + \sqrt{7}}{2}$.
Ainsi, $\dfrac{1 - \sqrt{7}}{2}$ et $\dfrac{1 + \sqrt{7}}{2}$ sont les deux antécédents de -1 par la fonction f.

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 16$.

1. Pour tout réel x,
$f(x) = 2(x+4)(x-2) = 2(x^2 - 2x + 4x - 8) = 2x^2 + 4x - 16$.

2. Pour tout réel x,
$f(x) = 2(x+1)^2 - 18 = 2(x^2 + 2x + 1) - 18 = 2x^2 + 4x + 2 - 18 = 2x^2 + 4x - 16$.

3. (a) Pour dresser le tableau de variations de f, on peut utliser la forme canonique.
$a = 2$. a étant positif, la parabole est tournée vers le haut. f admet donc un minimum, ce minimum est -16. Il est atteint lorsque $x = -1$. Ainsi,

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-18	$\nearrow$

(b) Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, le mieux est d'utiliser l'expression factorisée. Ainsi,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x+4)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x+4 = 0 \text{ ou } x-2 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \text{ ou } x = 2.$$

Ainsi, $S = \{-4\ ;\ 2\}$.

(c) Pour résoudre l'équation $f(x) = -16$, le mieux est d'utiliser l'expression développée et réduite $2x^2 + 4x - 16 = -16$. Ainsi,

$$f(x) = -16 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \text{ ou } 2x = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 0.$$

Ainsi, $S = \{-2\ ;\ 0\}$.

(d) Pour résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$, on peut utiliser l'expression factoriser et donc le tableau de signes.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+4)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $S =]-\infty\ ;\ -4] \cup [2\ ;\ +\infty[$.

Exercice 7 :

Une entreprise produit entre 0 et 50 balançoires par jour. Le coût de fabrication de x balançoires, en euros, est donné par la fonction suivante : $f(x) = x^2 + 230x + 325$.
Chaque balançoire est vendue 300 , et toute la production est vendue.

1. Le bénéfice $B(x)$ est égal à la recette $300x$ moins le coût $f(x)$. Ainsi,
$B(x) = 300x - f(x) = 300x - (x^2 + 230x + 325) = -x^2 + 70x - 325$.

2. B est une fonction polynôme de degré 2, déterminons sa forme canonique. Dans notre cas, $a = -1$ et $b = 70$. Ainsi,

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-70}{-2} = 35 \text{ et } \beta = B(35) = -35^2 + 70 \times 35 - 325 = 900$$

On peut alors écrire : $B(x) = -(x-35)^2 + 900$. $a = -2$, a étant négatif, la parabole représentant B est tournée vers le bas. Dès lors,

x	0	35	50
$B(x)$	$\nearrow$	900	$\searrow$

$\boxed{3}$ Le bénéfice maximal réalisé par lentreprise s'élève à 900 euros.

$\boxed{4}$ Pour que l'entrepise soit rentable, il faut que $B(x) > 0$, soit $-x^2 + 70x - 325 > 0$.
Le discriminant du trinôme $-x^2 + 70x - 325$ est égal à :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 70^2 - 4 \times (-1) \times (-325) = 4900 - 1300 = 3600.$$

Δ étant positif, cette équation admet deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-70-60}{2\times(-1)} = 65$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-70+60}{2\times(-1)} = 5$.
Ainsi, $B(x) = -(x-5)(x-65)$. Par ailleurs la production maximale est de 50, donc, $-(x-65) > 0$.
Autrement dit, $B(x)$ a le même signe de $x-5$.
Par conséquent, l'entreprise est rentable lorsqu'elle produit et vend plus de 5 balançoires.

Exercice 8 :

$\boxed{1}$ Soit f la fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

(a) $f(-1) = (-1)^2 + 4 \times (-1) + 30$, donc -1 est bel et bien une racine de f.

(b) Posons $x_1 = -1$ et x_2 la deuxième racine de f. Or, $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -4$. Donc, $x_2 = -3$.

(c) La forme factorisée est donc donnée par : $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = (x+1)(x+3)$.

$\boxed{2}$ On considère l'équation $x^2 - 7x + 6$.

(a) On a : $1^2 - 7 \times 1 + 6 = 0$. Donc 1 est bel et bien une solution de cette équation.

(b) Posons $x_1 = 1$ et x_2 la deuxième solution de cette équation. Or, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = 6$. Donc, $x_2 = 6$.

Exercice 9 :

Soit f la fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 - x + 3$.

$\boxed{1}$ $f(1) = -2 \times 1^2 - 1 + 3 = 0$, donc 1 est bel et bien une racine de f.

$\boxed{2}$ Posons $x_1 = 1$ et x_2 la deuxième racine de f. Or, $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{1}{2}$. Donc, $x_2 = -1 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2}$.

$\boxed{3}$ La forme factorisée de f est donnée par : $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = -2(x-1)\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$.

$\boxed{4}$ Tableau de signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\frac{3}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	