Dérivation

Corrigés

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

1. $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=2\underset{h\to 0}{\to}2$ donc f est dérivable en 3 et $f'(3)=2$.
2. $\dfrac{f(m+h)-f(m)}{h}=m\underset{h\to 0}{\to}m$ donc f est dérivable en a et $f'(a)=m$.
3. $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=-3h-12\underset{h\to 0}{\to}-12$ donc f est dérivable en 2 et $f'(2)=-12$.
4. $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{2}{h+1}\underset{h\to 0}{\to}2$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=2$.
5. $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}\underset{h\to 0}{\to}+\infty$ donc f n'est pas dérivable en 1.
6. $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=3+h\underset{h\to 0}{\to}3$ donc f est dérivable en 2.
7. $\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=48+12h+h^2\underset{h\to 0}{\to}48$ donc f est dérivable en 4.
8. $\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\dfrac{1}{-1+h}\underset{h\to 0}{\to}-1$ donc f est dérivable en -2.
9. $\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=\dfrac{2}{\sqrt{4+h}+2}\underset{h\to 0}{\to}\dfrac{1}{2}$ donc f est dérivable en 4.

Exercice 2 :

1. $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=3-h\underset{h\to 0}{\to}3$ donc f est dérivable en -1 et $f'(-1)=3$. T a pour équation $y=3x+2$.
2. $\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h+4}+2}\underset{h\to 0}{\to}\dfrac{1}{4}$ donc f est dérivable en 4 et $f'(4)=\dfrac{1}{4}$.
   T a pour équation $y=\dfrac{1}{4}x+1$.
3. $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}\underset{h\to 0}{\to}+\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0. f admet tout de même une tangente en 0 mais verticale, d'équation $x=0$.
4. $\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\dfrac{1}{2h-4}\underset{h\to 0}{\to}-\dfrac{1}{4}$ donc f est dérivable en -2 et $f'(-2)=-\dfrac{1}{4}$.
   T a pour équation $y=-\dfrac{1}{4}x-1$.
5. $f'(x)=6x-1$ donc $f'(2)=11$. Dès lors, T a pour équation $y=11(x-2)+f(2)=11x-13$.
6. $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ donc $f'(-1)=-1$. Dès lors, T a pour équation $y=-1(x-(-1))+f(-1)=-x-2$.
7. $f'(x)=3x^2$ donc $f'(2)=12$. Dès lors, T a pour équation $y=12(x-2)+f(2)=12x-32$.
8. $f'(x)=2x+1$ donc $f'(0)=1$. Dès lors, T a pour équation $y=1(x-0)+f(0)=x+1$.

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1 Pour tout réel a,

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2+3(a+h)-1-(a^2+3a-1)}{h}\\ &= \frac{\cancel{a^2}+2ah+h^2+\cancel{3a}+3h-1-\cancel{a^2}-\cancel{3a}+1)}{h}\\ &= \frac{2ah+h^2+3h}{h}\\ &= \frac{\cancel{h}(2a+h+3)}{\cancel{h}}\\ &= 2a+h+3.\end{aligned}$$

Or, $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Donc, $f'(a) = 2a+3$.

2 L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1)+f(1)\\ &= 5(x-1)+3\\ &= 5x-2.\end{aligned}$$

3 $\vec{u}\binom{1}{-2}$ est un vecteur directeur de la droite $y = -2x+\sqrt{17}$.
Dire que qu'une tangente en un point de $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = -2x+\sqrt{17}$ revient à dire $\vec{u}\binom{1}{-2}$ est un vecteur directeur de cette tangente. Autrement dit, $f'(a) = -2$.
Or, l'équation $f'(a) = -2$ admet une solution. Donc, il existe bel et bien une tangente en un point de $\mathscr{C}_f$ parallèle à la droite d'équation $y = -2x+\sqrt{17}$.

4 $\left(-\dfrac{5}{2}\ ;\ -\dfrac{9}{4}\right)$ sont les coordonnées du point de contact entre cette tangente et $\mathscr{C}_f$. En effet,

$$\begin{aligned} f'(a) = -2 &\Leftrightarrow 2a+3 = -1\\ &\Leftrightarrow a = -\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

En outre, $f\left(-\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{9}{4}$.

Exercice 4 :

On considère la fonction définie par la courbe ci-après et certaines des tangentes à la courbe.

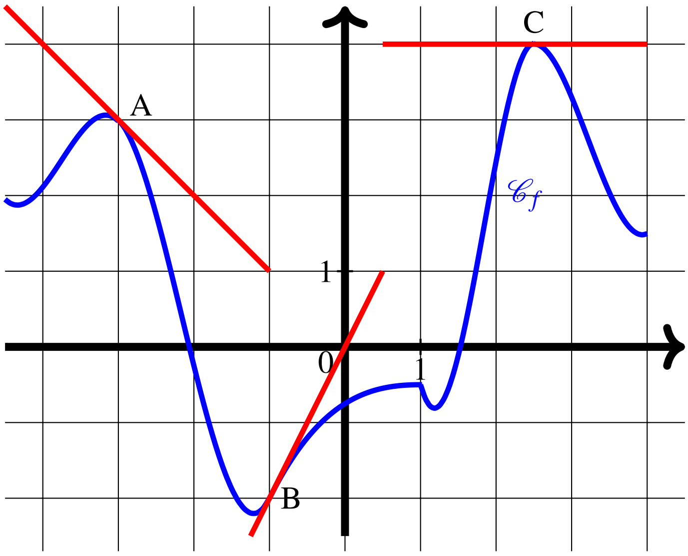
1 Dans chacun des cas suivants, donner $f(a)$ et $f'(a)$.

(a) $f(-3) = 3$ et $f'(-3) = -1$.

(b) $f(-1) = -2$ et $f'(-1) = 2$.

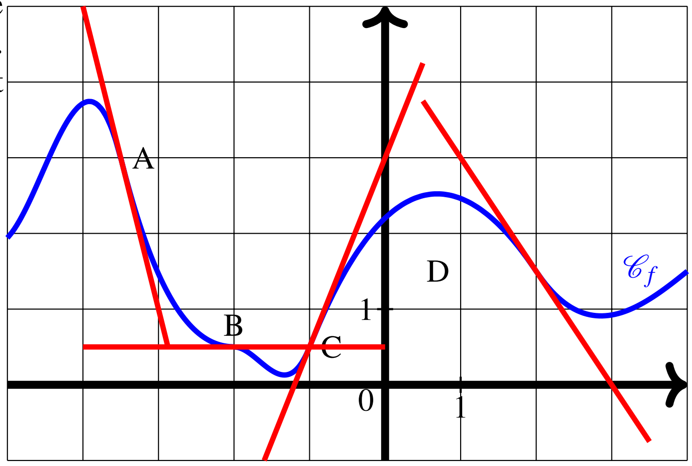
(c) $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = 4$ et $f'\left(\dfrac{5}{2}\right) = 0$.

2 f n'est pas dérivable en $a = 1$ car la courbe présente un point



Exercice 5 :

On considère la fonction définie par la courbe ci-contre et certaines des tangentes à la courbe. Dans chacun des cas suivants, donner $f(a)$ et $f'(a)$.



1. $f(-3,5) = 3$ et $f'(-3,5) = -\dfrac{4}{1} = -4$.
2. $f(-2) = 0,5$ et $f'(-2) = 0$.
3. $f(-1) = -0,5$ et $f'(-1) = \dfrac{2,5}{1} = 2,5$.
4. $f(2) = 1,5$ et $f'(2) = -\dfrac{3}{2}$.

Exercice 6 :

On considère la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

1. Graphiquement :
   (a) pourquoi f n'est-elle pas dérivable en 0 ?
   (b) que vaut $f'(0)$ « à gauche de 0 », « à droite de 0 » ?
2. Algébriquement :
   (a) Vérifier que $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}(0) = \dfrac{|h|}{h}$.
   (b) En distinguant les cas $h > 0$ et $h < 0$, retrouver les résultats de la question 1.

Exercice 7 :

Soit $f : x \mapsto x|x|$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
Démontrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

Exercice 8 :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+|x|}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que f n'est pas dérivable en 0.