Variable aléatoire
1re Spé Maths
Introduction
Une expérience aléatoire
Définition plus théorique
Loi de probabilité
Espérance d'une variable aléatoire
Variance et écart-type d'une variable aléatoire
Interprétation
Théorème de König-Huygens

Variable aléatoire

1re Spé Maths

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

Lycée Evariste Galois

I. Introduction

Considérons une expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés cubiques non pipés (non truqués) et regardons la somme des faces obtenues. Voici les différentes possibilités que nous avons :

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Notons S la somme des deux dés. Alors, les valeurs possibles de S sont dans l'ensemble : $\{2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\,;11\,;12\}$.
On dit ici que S est une *variable aléatoire* car sa valeur varie (d'où le mot « variable ») et ce, de façon aléatoire (car sa valeur dépend des issues obtenues dans l'expérience aléatoire).
Par abus de langage, et pour simplifier la notion, on écrira :

$$S = \{2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\,;11\,;12\}.$$

Variable aléatoire

1re Spé Maths

Introduction
Une expérience aléatoire
Définition plus théorique
Loi de probabilité
Espérance d'une variable aléatoire
Variance et écart-type d'une variable aléatoire
Interprétation
Théorème de König-Huygens

Définition

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire dont les issues possibles sont des nombres (lancers de dés, nombres de stylos dans une trousse,...).

On appelle **variable aléatoire** l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les issues de $\mathcal{E}$.

Exemples

1. L'univers étant une classe donnée, l'expérience consiste à regarder le nombre de stylos dans une trousse d'un élève. On constate que le nombre de stylos varie entre 5 et 10. Alors, la variable aléatoire représentant ce nombre est :

$$X = \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}.$$

2. L'univers étant un lycée donné, l'expérience consiste à regarder dans chaque classe le nombre d'élèves mesurant plus de 2 mètres. On constate que ce nombre varie entre 0 et 5. Alors, la variable aléatoire représentant le nombre d'élèves de ce lycée mesurant plus de 2 mètres est :

$$X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

Définition

Soit Ω un univers probabilisé et $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire dans Ω.
Une **variable aléatoire** X est une application qui, à chaque événement élémentaires de Ω, associe un nombre réel. Autrement dit,

$$X \; : \; \Omega \to \mathbb{R}.$$

L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega)$.

Remarque

- En théorie, $X(\Omega)$ est un ensemble pouvant être infini. Cependant, au lycée, on se limite au cas où il est fini.
- De plus, par soucis de simplification, on notera plutôt X l'ensemble $X(\Omega)$, quitte à installer une ambiguïté entre la fonction et l'ensemble des valeurs prises par cette fonction.
- Il existe deux types de variables aléatoires réelles : discrètes et continues. En 1^{re}, on ne rencontrera que des variables aléatoires discrètes, c'est-à-dire où les valeurs prises sont dénombrables (des valeurs que l'on peut compter une à une).

Introduction
Une expérience aléatoire
Définition plus théorique
Loi de probabilité
Espérance d'une variable aléatoire
Variance et écart-type d'une variable aléatoire
Interprétation
Théorème de König-Huygens

II. Loi de probabilité

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète.
La **loi de probabilité** de X est la donnée de la probabilité de toutes les valeurs que peut prendre X.
En général, elle est donnée sous forme de tableau.

Exemple

Reprenons l'exemple du lancer de deux dés cubiques non pipés, où S est la variable aléatoire représentant la somme obtenue.
D'après le tableau obtenu précédemment, on peut écrire :

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(S = s_i)$	$\dfrac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

À titre d'exemple, sur les 36 issues possibles, seule une donne la somme « 2 ». Donc la probabilité d'obtenir une somme égale à 2, que l'on note $p(S = 2)$, est égale à $\dfrac{1}{36}$.

Variable aléatoire

1re Spé Maths

Introduction
Une expérience aléatoire
Définition plus théorique
Loi de probabilité
Espérance d'une variable aléatoire
Variance et écart-type d'une variable aléatoire
Interprétation
Théorème de König-Huygens

III. Espérance d'une variable aléatoire

Définition

Soit $X = \{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une variable aléatoire discrète.
On appelle **espérance mathématique** de X le nombre défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p(X = x_i)\ .$$

Remarque

Le calcul de l'espérance mathématique ressemble à celui de la moyenne d'une série statistique.
L'espérance peut alors être considérée comme la « valeur moyenne » de la variable aléatoire si on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent. Alors,

$$E(S) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{1}{18} + 4 \times \frac{1}{12} + \cdots + 11 \times \frac{1}{18} + 12 \times \frac{1}{36}$$

$$E(S) = 7.$$

Cela signifie que sur un grand nombre de lancers, on peut espérer obtenir en moyenne une somme égale à 7.

Propriété : Linéarité de l'espérance

Soit X une variable aléatoire discrète. Soient a et b deux réels. Alors,

$$E(aX+b) = aE(X)+b.$$

Démonstration

Par définition, $a\mathrm{X}+b = \left\{ax_i+b\right\}_{1\leqslant i\leqslant n}$. Alors,

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i+b\right) \times p(aX+b = ax_i+b) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i+b\right) \times p(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} ax_i \times p(X=x_i) + \sum_{i=1}^{n} bp(X=x_i) \\ &= aE(X)+b. \end{aligned}$$

Introduction
Une expérience aléatoire
Définition plus théorique
Loi de probabilité
Espérance d'une variable aléatoire
Variance et écart-type d'une variable aléatoire
Interprétation
Théorème de König-Huygens

IV. Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définition

Soit X $= \{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ une variable aléatoire discrète.

- On appelle **variance mathématique** de X le nombre défini par :

$$V(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - E(X)\right]^2 \times p(X = x_i)\ .$$

- On appelle **écart-type** de X le nombre défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exemple

Reprenons l'exemple précédent. Ajoutons une ligne à la loi de probabilité de S :

$S = s_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$S - E(S)$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$p(S = s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

$$\begin{aligned} V(S) &= (-5)^2 \times \frac{1}{36} + (-4)^2 \times \frac{1}{18} + (-3)^2 \times \frac{1}{2} + \cdots + 5^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{35}{6} \\ &\approx 5,83 \end{aligned}$$

et donc,

$$\sigma(S) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2,4.$$

Dans la formule $V(X) = E\big(X - E(X)\big)^2$, si on élève au carré la variable $X - E(X)$, c'est pour manipuler une variable positive. Cette nouvelle variable représente alors le carré de la différence entre X et son espérance. Ainsi, la variable est l'espérance de ce carré ; on peut donc l'interpréter comme la moyenne des carrés des différences entre X et $E(X)$.
En prenant la racine carrée de la variance pour calculer l'écart-type, on se ramène à la moyenne des différences (en valeur absolue). Ainsi, l'écart-type représente l'écart moyen de chaque valeur de X à son espérance.

En obtenant $E(S) = 7$ et $\sigma(S) \approx 2,4$, on peut conclure que sur un grand nombre de lancers, on peut espérer en moyenne avoir une somme égale à 7 plus ou moins 2,4, soit une somme comprise entre 4,6 et 9,4.

Propriété : König-Huygens

Soit X $= \{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une variable aléatoire discrète. Alors,

$$V(X) = E(X^2) - \big[E(X)\big]^2.$$

Démonstration

$$\begin{aligned} V(X) &= E\big(X - E(X)\big)^2 \quad \text{(par définition)} \\ &= E(X^2) - E(2XE(X)) + E\big(E(X)\big)^2 \\ &= E(X^2) - 2\big[E(X)\big]^2 + \big[E(X)^2\big] \\ &= E(X^2) - \big[E(X)\big]^2. \end{aligned}$$

Remarque

Dans la pratique, ce théorème nous permet de calculer la variance de façon peut-être plus simple que dans certains cas.