Trigonométrie

1re Spé Maths

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

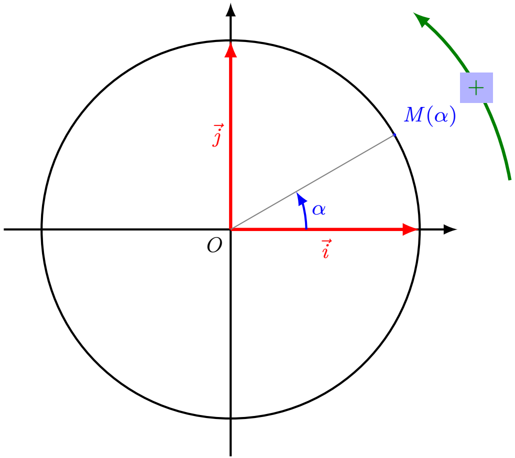
Lycée Evariste Galois

I. Cercle trigonométrique

Définition

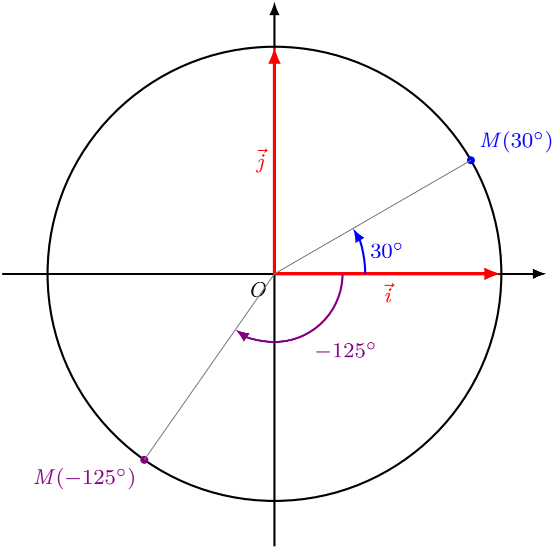
Dans un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, on appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on peut considérer des points M repérés par l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OM}$, noté α.

Le **sens trigonométrique** est le sens de la rotation qui transforme $\vec{i}$ en $\vec{j}$; c'est le sens *positif* (concernant le signe des angles).



Exemple

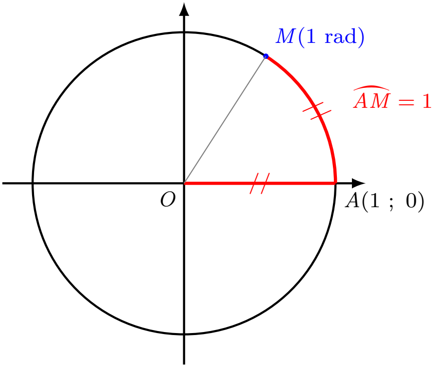
Voici deux exemples d'angles.



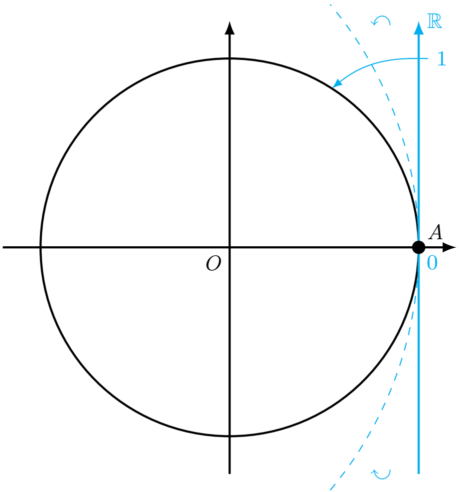
II. Radians

Définition

Soit $A(1\;;\;0)$. On appelle **radian** l'angle dont la longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est égale à 1.



À partir de là, on peut imaginer que l'on enroule la droite des réels sur le cercle trigonométrique, en mettant « 0 » sur le point A.



Ainsi, tous les nombres réels vont se retrouver sur le cercle trigonométrique, et vont correspondre à des points $M(\alpha)$. On dira alors que $M(\alpha)$ est l'image du nombre réel α sur le cercle trigonométrique. On en déduit alors la propriété suivante.

Propriété

Un point M peut être l'image de plusieurs nombres réels.

Autrement dit, il existe une infinité de nombres réels qui ont pour image un point donné sur le cercle trigonométrique.

Définition

- On appelle **angle en radians** d'un point M du cercle trigonométrique tout réel dont l'image sur ce cercle est M.
- On appelle **mesure principale** tout angle dans $]-\pi;\pi]$.

Ainsi, tous les angles que nous connaissons en degrés auront un équivalent en radians.

Angles (en degrés)	0	30	45	60	90	180	360
Angles (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

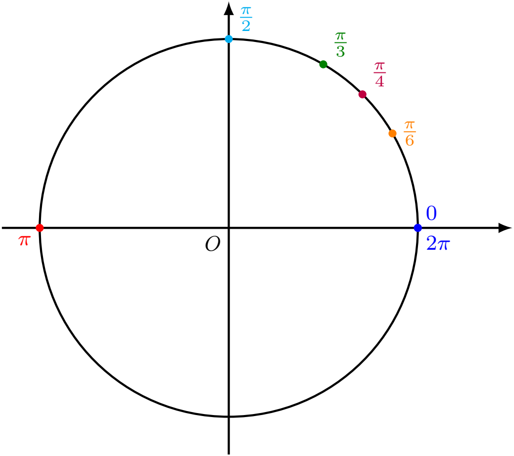
On remarque que ce tableau est un tableau de proportionnalité. Ainsi, pour convertir en radians un angle exprimé en degrés, il suffira de partir, par exemple, du fait que π rad $= 180°$.

Exemple

Pour convertir 72° en radians, on calcule : $\dfrac{\pi}{180} \times 72 = \dfrac{2\pi}{5}$.

Donc $72° = \dfrac{2\pi}{5}$ rad.

Les points du cercle trigonométrique images des nombres 0, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{2}$, π et 2π sont les suivants :

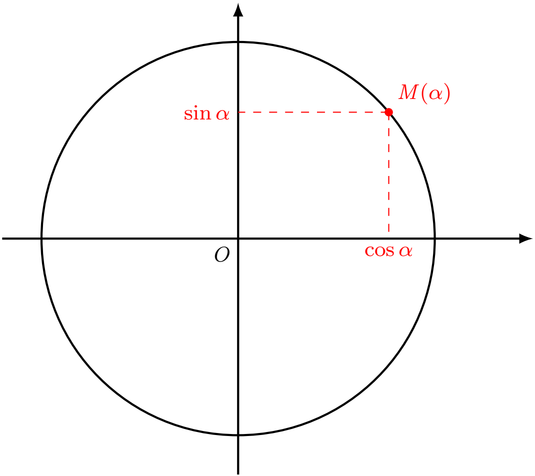


II. Sinus et cosinus

Définition

Soit $M(\alpha)$ un point sur le cercle trigonométrique.

- On appelle **cosinus** de l'angle α, et on note $\cos(\alpha)$ ou $\cos\alpha$, l'abscisse du point M ;
- On appelle **sinus** de l'angle α, et on note $\sin(\alpha)$ ou $\sin\alpha$, l'ordonnée du point M.



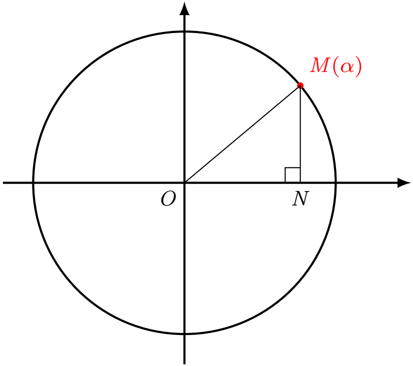
Propriété fondamentale trigonométrique

Pour tout nombre réel x,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Démonstration

Notons N le point de coordonnées $(\cos\alpha; 0)$.
Le triangle OMN est rectangle en N.



D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$OM^2 = ON^2 + MN^2.$$

Or, $OM = 1$ (car c'est le rayon du cercle trigonométrique), $ON = \cos\alpha$ et $MN = \sin\alpha$, d'où :

$$1 = (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2.$$

Propriété

Angles (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Démonstration

Calculons d'abord $\cos\frac{\pi}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{4}$.

Le triangle OMN est rectangle et isocèle en N, donc $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$. En appliquant la propriété fondamentale trigonométrique, on obtient :

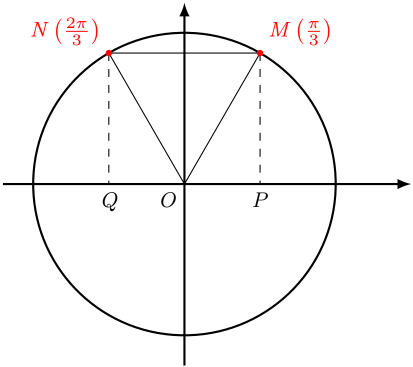
$$\cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \text{soit} \qquad 2\cos^2\frac{\pi}{4} = 1.$$

Dès lors, $\cos^2 \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}$. Or, $\cos \dfrac{\pi}{4} > 0$. Donc,

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Calculons à présent $\cos \dfrac{\pi}{3}$ et $\sin \dfrac{\pi}{3}$.

Considérons les points $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $N\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ sur le cercle trigonométrique, ainsi que leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses P et Q.



Le triangle OMN est alors équilatéral car $\widehat{MON} = \dfrac{\pi}{3}$ $(60°)$ et $OM = ON$. Ainsi, $MN = MO = 1$.

On en déduit également que $QP = 1$. Or, M et N étant symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, il en est de même de P et Q. Donc, $OP = \frac{1}{2}$. Autrement dit, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
En utilisant à présent la propriété fondamentale trigonométrique, on en déduit $\sin\frac{\pi}{3}$. En effet,

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3} = 1 &\iff \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{\pi}{3} = 1\\ &\iff \sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}\\ &\iff \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Les sinus et cosinus de $\frac{\pi}{6}$ se trouvent par un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait pour $\frac{\pi}{3}$.
Quant aux autres, elles sont immédiates.

III. Fonctions sinus et cosinus

Définition

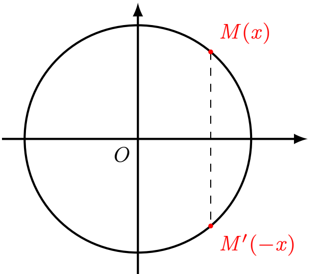
- On dit qu'une fonction est **paire** si son domaine de définition $\mathcal{D}$ est centré en 0 et si, pour tout x dans $\mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$.
- On dit qu'une fonction est **impaire** si son domaine de définition $\mathcal{D}$ est centré en 0 et si, pour tout x dans $\mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$.

Propriété

- La fonction $x \mapsto \cos x$ est paire.
- La fonction $x \mapsto \sin x$ est impaire.

Démonstration

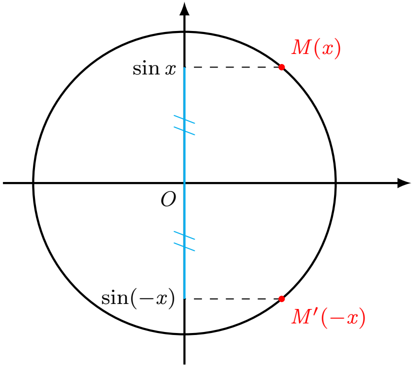
Fonction $x \mapsto \cos x$.
Son domaine de définition est $\mathbb{R}$, donc centré en 0. De plus, nous avons :



Ainsi, $\cos(-x) = \cos(x)$. La fonction $x \mapsto \cos x$ est donc paire.

Fonction $x \mapsto \sin x$.

Son domaine de définition est $\mathbb{R}$, donc centré en 0. De plus, nous avons :



Ainsi, $\sin(-x) = -\sin(x)$ (car M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses).

Définition

On dit qu'une fonction f est ***T*-périodique** si son domaine de définition $\mathcal{D}$ est centré en 0 et si, pour tout réel de $\mathcal{D}$,

$$f(x+T) = f(x).$$

Propriété

Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont 2π-périodiques.

Démonstration

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π. Ainsi, les nombres x et $x + 2\pi$ auront la même image sur le cercle trigonométrique, ce qui signifie que :

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \sin(x + 2\pi).$$

De plus, les deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ (qui est centré en 0).
Donc $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont 2π-périodiques.

Remarque

On peut aussi dire que les fonctions sont périodiques de période 2π.

- Le fait de dire que les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont 2π-périodiques signifie que si on prend n'importe quel intervalle d'amplitude 2π, le motif de la courbe représentative trouvé sur cet intervalle pourra se répéter.
  On peut alors tracer les courbes représentatives sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$, et déduire la totalité des courbes par translations de vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2k\pi\\0\end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}^*$.
- Le fait de dire que $x \mapsto \cos x$ est paire signifie que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (car $f(-x) = f(x)$).
  De plus, le fait de dire que $x \mapsto \sin x$ est impaire signifie que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère (car $f(-x) = -f(x)$).

On peut alors tracer les courbes représentatives sur l'intervalle $[0;\pi]$, et déduire les courbes par symétries (axiale ou centrale). Au final, les courbes représentatives sont les suivantes.