Suites numériques

1re Spé Maths

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

Lycée Evariste Galois

I. Activité

Compléter les suites "logiques" suivantes. Donner, si possible, le $10^{\text{ème}}$ nombre de la suite, puis le $20^{\text{ème}}$.

a) 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ....

....

....

b) 2 ;4 ;6 ;8 ;10 ....

....

....

c) 3 ;7 ;11 ;15 ;19 ....

....

....

d) 2 ;4 ;8 ;16 ;32 ....

....

....

e) 2 ;3 ;5 ;9 ;17 ....

....

....

f) 0 ;1 ;8 ;27 ;64 ;125 ....

....

....

g) 1 ;1 ;2 ;3 ;5 ;8 ;13 ;21 ....

....

....

II. Introduction

Définition

On appelle **suite numérique** une fonction dont la variable est un entier naturel.
Pour ne pas confondre avec les fonctions à variables réelles, la variable est mise en indice.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, alors n est l'**indice** du **terme** u_n.

On peut définir une suite de deux manières :

- par une fonction (si on connaît l'expression du terme général en fonction de l'indice) ;
- par récurrence (si on calcule un terme en fonction du ou des termes précédents).

Exemples

1. Si on définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par : $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \dfrac{1}{n}$,

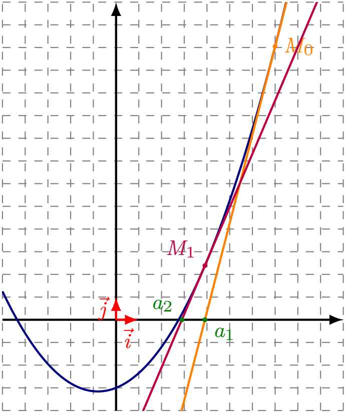
   alors $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est définie par la fonction $n \mapsto \dfrac{1}{n}$; on dit qu'elle est définie de **manière explicite**.

2. Dans la méthode de Newton, les nombres a_n se calculent avec la relation :

$$\begin{cases} a_0 \text{ donné} \\ a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}. \end{cases}$$

   Dans la mesure où on calcule un terme à l'aide du terme précédent, la suite est définie de **manière récurrente.**

Rappels : Nous avons vu dans le chapitre précédent que la méthode de Newton a pour objectif de trouver des nombres qui se rapprochent de plus en plus d'une solution à l'équation $f(x) = 0$.



Les nombres a_1, a_2, ...se rapprochent de la solution.

On dit que les nombres a_1, a_2, ...sont les **termes successifs** de la **suite** (a_n).

Objectifs

L'étude des suites numériques consiste à :

- trouver leurs variations ;
- exprimer de façon explicite leur terme général (quand elles sont définies par récurrence).

Pour étudier les variations d'une suite, la dérivation ne sera pas toujours possible et notamment quand dans le cas où la suite est définie de manière récurrente.
Le second point de nos objectifs est sans doute le plus problématique car, dans un cas général, il n'est pas chose aisée de passer de la forme récurrente à la forme explicite.

Variations d'une suite

Définition

- On dira qu'une suite (u_n) est **strictement croissante** à partir de n_0 si :
$$\forall n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} > u_n.$$
- On dira qu'une suite (u_n) est **strictement décroissante** à partir de n_0 si :
$$\forall n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} < u_n.$$
- On dira qu'une suite (u_n) est **constante** à partir de n_0 si :
$$\forall n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} = u_n.$$

Pour trouver le sens de variation d'une suite, nous avons trois méthodes, qui dépendent de la manière dont est définie la suite.
Méthode 1 : On calcule $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n. croissante.

Exemple : **Cas d'une suite définie de façon explicite.**

Posons $u_n = \sqrt{n+1}$. Quel que soit l'entier n, $n+2 > n+1$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, Ainsi,

$$\sqrt{n+2} > \sqrt{n+1}$$

Par conséquent

$$u_{n+1} > u_n$$

ce qui signifie que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Exemple : **Cas d'une suite définie par récurrence.**

Posons pour tout entier naturel n : $\begin{cases} v_0 = 9 \\ v_{n+1} = v_n^2 - v_n + 3 \end{cases}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (v_n^2 - v_n + 3) - v_n \\ &= v_n^2 + 3. \end{aligned}$$

Quel que soit la valeur de l'entier n, $v_n^2 \geqslant 0$ donc $v_n^2 + 3 \geqslant 3$, et donc $v_{n+1} - v_n > 0$.
Par conséquent, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} > v_n$. Autrement dit, la suite est donc croissante sur $\mathbb{N}$.

Méthode 2 : Si pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ (ou bien $u_n < 0$) alors on peut calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et comparer le résultat à 1.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \dfrac{3^n}{5^{n+1}}$.
Quel que soit l'entier n, $3^n > 0$ et $5^{n+1} > 0$ donc $u_n > 0$.
On peut donc calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. L'expression de u_{n+1} s'obtient en remplaçant n par $n+1$ dans l'expression de u_n :

$$u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{5^{n+1+1}} = \frac{3^{n+1}}{5^{n+2}}.$$

Ainsi,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{5^{n+2}}}{\frac{3^n}{5^{n+1}}} = \frac{3^{n+1}}{5^{n+2}} \times \frac{5^{n+1}}{3^n}.$$

On réunit maintenant les puissances de 3 dans une même fraction, et les puissances de 5 dans une autre même fraction :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \times \frac{5^{n+1}}{5^{n+2}} = \frac{\cancel{3^n} \times 3^1}{\cancel{3^n}} \times \frac{\cancel{5^{n+1}}}{\cancel{5^{n+1}} \times 5^1} = \frac{3}{5} < 1.$$

Ainsi, (u_n) est strictement décroissante.

Méthode 3 : Si la suite est définie de manière explicite par une fonction f, et si on peut étudier facilement les variations de f sur $\mathbb{R}^+$ (car dans $u_n = f(n)$, n est un entier naturel, donc positif), alors on le fait.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 5n - 1$.

Ainsi, $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 - 5x - 1$. C'est un polynôme de degré 2 dont le coefficient principal est positif ($a = 1 > 0$).

Dès lors, les branches de la parabole qui le représente sont dirigées vers le haut et son sommet a pour abscisse $x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2} = 2,5$.

On déduit alors que f est strictement croissante sur $[2,5;+\infty[$.

Par conséquent, la suite (u_n) est donc strictement croissante à partir de $n = 3$ (on prend l'entier tout de suite supérieur à 2,5).

Définition

- On appelle **majorant** d'une suite (u_n) tout nombre M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
- On appelle **minorant** d'une suite (u_n) tout nombre m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$.

Exemples

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$. « 0 » est un minorant de (u_n) car pour tout entier naturel n non nul, $u_n > 0$.
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = 3 - \dfrac{1}{n}$. Pour tout entier naturel $n > 0$, $\frac{1}{n} > 0$ donc $3 - \frac{1}{n} < 3$.
   « 3 » est donc un majorant de (v_n).
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $a_n = 2(n-1)^2 - 3$. « 0 » est un minorant de (a_n) car pour tout entier naturel n non nul, $a_n \geqslant -3$.
4. Soit $(b_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $b_n = -2(n-1)^2 + 5$. « 0 » est un minorant de (b_n) car pour tout entier naturel n non nul, $b_n \leqslant 5$.

III. Suites arithmétiques

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

où r est un nombre réel. r est alors appelé la **raison** de la suite.

Exemple

Maria possède 30 € d'argent de poche.
Chaque semaine, elle reçoit 5 € de la part de ses parents.

Si elle ne dépense pas son argent petit à petit,

- après 1 semaine, elle aura $30 + 5 = 35$ € ;
- après 2 semaines, elle aura $35 + 5 = 40$ € ;
- après 3 semaines, elle aura $40 + 5 = 45$ € ;
- etc.

Si on note u_n la somme qu'elle a après n semaine(s) alors :

$$u_0 = 30 \quad ; \quad u_1 = 30 + 5 = 35 \quad ; \quad u_2 = 35 + 5 = 40 \quad ; \quad \ldots$$

que l'on peut aussi écrire : $\begin{cases} u_0 = 30 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$. La suite (u_n) est alors arithmétique de premier terme $u_0 = 30$ et de raison $r = 5$.

Propriété 1

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$ alors (u_n) est constante.

Démonstration

Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = (u_n + r) - u_n = r.$$

Dès lors,

- si $r > 0$, $u_{n+1} - u_n > 0$ et donc $u_{n+1} > u_n$. Autrement dit, la suite (u_n) est donc strictement croissante.
- si $r < 0$, $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc $u_{n+1} < u_n$. Autrement dit, la suite (u_n) est donc strictement décroissante.
- si $r = 0$, $u_{n+1} - u_n = 0$ et donc $u_{n+1} = u_n$. Autrement dit, la suite (u_n) est donc constante.

Propriété 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_p et de raison r, $p \geqslant 0$. Alors,

$$\forall n \geqslant p, \quad u_n = u_p + (n-p)r.$$

Démonstration

Le schéma suivant illustre la situation dans laquelle nous sommes :

$$\begin{tikzcd} \boxed{u_p} \arrow[r, bend left, "+r"] & \boxed{u_{p+1}} \arrow[r, bend left, "+r"] & \boxed{u_{p+2}} \arrow[r, bend left, "+r"] & \cdots \arrow[r, bend left, "+r"] & \boxed{u_{n-1}} \arrow[r, bend left, "+r"] & \boxed{u_n} \end{tikzcd}$$

On peut écrire :

$$u_n = u_{p+(n-p)}$$

donc pour passer de u_p à $u_{p+(n-p)}$, on ajoute $(n-p)$ fois r, d'où :

$$u_n = u_p + (n-p)r.$$

Exemple

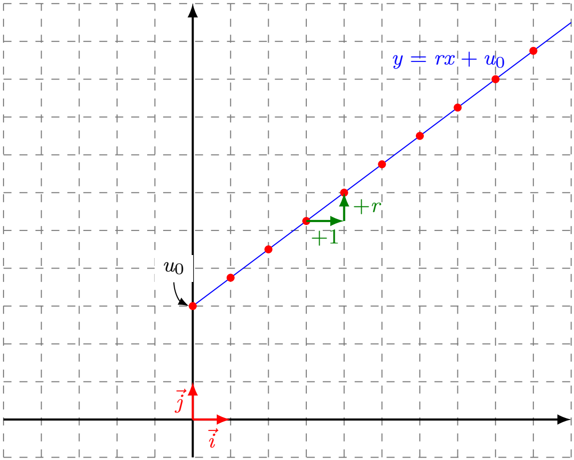
En utilisant l'exemple de Simon, nous avions établi l'égalité :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = u_n + 5 \qquad \text{avec } u_0 = 30.$$

D'après la dernière propriété, on a :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = 30 + 5n.$$

Une suite peut être représentée par une série de points de coordonnées $(n; u_n)$.



;

Dans le cas d'une suite arithmétique de raison r, les points ont pour coordonnées $(n; u_0 + nr)$.
Tous les points sont donc alignés sur la droite d'équation $y = rx + u_0$, où u_0 est l'ordonnée à l'origine et r, le coefficient directeur.

Propriété 3

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration

On remarque que :

$$\begin{array}{llllllllll}
E_n & = 1+2+ & 3 & + & \cdots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\
E_n & = n+(n-1)+ & (n-2) & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2E_n & = (n+1)+(n+1)+ & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

Ainsi, $2E_n=n\times(n+1)$. D'où le résultat.

Remarque

Le symbole « $\sum$ » (c'est la lettre grecque *sigma majuscule*) est très souvent utilisé pour désigner une somme de termes.

Ainsi, quand on écrit $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} u_k$, cela désigne la somme $u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots+u_{99}+u_{100}$.

La dernière propriété peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Propriété 4

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r$$

nombre de termes dans la somme

Démonstration

Nous savons que pour tout entier naturel k, $u_k = u_0 + kr$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n \\
&= u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + (u_0 + 3r) + \cdots + \left[u_0 + (n-1)r\right] + (u_0 + nr) \\
&= \underbrace{(u_0 + u_0 + u_0 + \cdots + u_0)}_{(n+1)\text{ termes}} + \left[r + 2r + 3r + \cdots + (n-1)r + nr\right] \\
&= (n+1)u_0 + \underbrace{(1 + 2 + 3 + \cdots + n)}_{\text{somme des premiers entiers}} r \\
&= (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r. \qquad \text{(E)}
\end{aligned}$$

Propriété 5

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Démonstration

Reprenons l'égalité (E) précédente et allons plus loin :

$$\begin{aligned} S_n &= (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r \\ &= (n+1)\left[u_0 + \frac{nr}{2}\right] \\ &= (n+1)\left[\frac{2u_0 + nr}{2}\right] \\ &= (n+1)\left[\frac{u_0 + (u_0 + nr)}{2}\right] \\ &= (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression est plus facile à retenir car « n+1 » représente le nombre de termes dans la somme, u_0 désigne le premier terme de la somme et u_n, le dernier.

Exemples

1. Considérons la suite (a_n) définie par : $a_n = 2n+3$.
   C'est donc une suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 2.
   Alors, d'après la propriété 2, $u_{100} = 2\times 100+3 = 203$ et par la suite, en utilisant la propriété 5 on obtient :

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{100} = 101\times\frac{3+203}{2} = 101\times 103 = 10\,403.$$

2. Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n+3 \end{cases}.$$

   C'est donc une suite arithmétique de premier terme 5 et de raison 3.
   Alors, d'après la propriété 2, $u_{200} = 5+200\times 3 = 605$ et par la suite, en utilisant la propriété 5 on obtient :

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{200} = 201\times\frac{5+605}{2} = 201\times 305 = 61\,305.$$

IV. Suites géométriques

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** si, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

où q est un nombre réel non nul. q est alors appelé la **raison** de la suite.

Exemple

Sophie a placé ses économies, à savoir 1 000 €, sur un livret qui lui rapporte 1,5% par an, c'est-à-dire que d'une année à l'autre, ses économies augmenteront de 1,5% du solde précédent.
Si on note $u_0 = 1\,000$ et u_n le montant de son livret après n années, alors :

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1,5}{100}\right) = 1,015 u_n.$$

(u_n) est alors une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1\,000$ et de raison $q = 1,015$.

Propriété 6

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_p et de raison q, $q \geqslant 0$. Alors,

$$\forall n \geqslant p, \quad u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Démonstration

Le schéma suivant illustre la situation dans laquelle nous sommes.

$$\boxed{u_p} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_{p+1}} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_{p+2}} \xrightarrow{\times q} \cdots \xrightarrow{\times q} \boxed{u_{n-1}} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_n}$$

On peut écrire :

$$u_n = u_{p+(n-p)}$$

donc pour passer de u_p à $u_{p+(n-p)}$, on multiplie par q, et ceci $(n-p)$ fois, d'où :

$$u_n = u_p \times \underbrace{q \times q \times \cdots \times q}_{(n-p)\text{ facteurs}} = u_p \times q^{n-p}.$$

Corollaire

Cas où $p = 0$: Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Alors,

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = u_0 \times q^n.$$

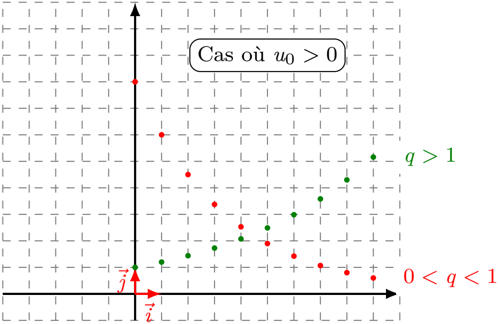
Cas où $p = 1$: Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q. Alors,

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = u_0 \times q^{n-1}.$$

Selon les valeurs de la raison q de la suite géométrique, les points qui représentent les termes successifs « monteront » ou « descendront ».

Pour simplifier, prenons $\boldsymbol{u_0 > 0}$.

- Si $q = 1$ alors $u_{n+1} = u_n$, donc la suite (u_n) est constante (ce qui se traduira par une succession de points alignés sur une droite horizontale d'équation $y = u_0$).
- Si $q > 1$ alors l'égalité $u_{n+1} = qu_n$ nous dit que la suite est strictement croissante et donc que les points « monteront » (auront une ordonnée de plus en plus grande).
- Si $0 < q < 1$ alors l'égalité $u_{n+1} = qu_n$ nous dit que la suite est strictement décroissante et donc que les points « descendront » (auront une ordonnée de plus en plus petit en se rapprochant 0).



Propriété 7

Pour $q \neq 1$,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Démonstration

Posons $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$.
Alors,

$$qS_n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}.$$

Ainsi,

$$qS_n = S_n - 1 + q^{n+1}$$

et donc :

$$qS_n - S_n = q^{n+1} - 1$$

soit :

$$(q-1)S_n = q^{n+1} - 1.$$

On en déduit alors que :

$$S_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \qquad \text{ou encore} \qquad S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Propriété 8

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$. Alors,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Démonstration

D'après le corollaire :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 + qu_0 + q^2 u_0 + \cdots + q^n u_0,$$

ainsi,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0(1 + q + q^2 + \cdots + q^n).$$

En plus, d'après la propriété 7 :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$