Le second degré

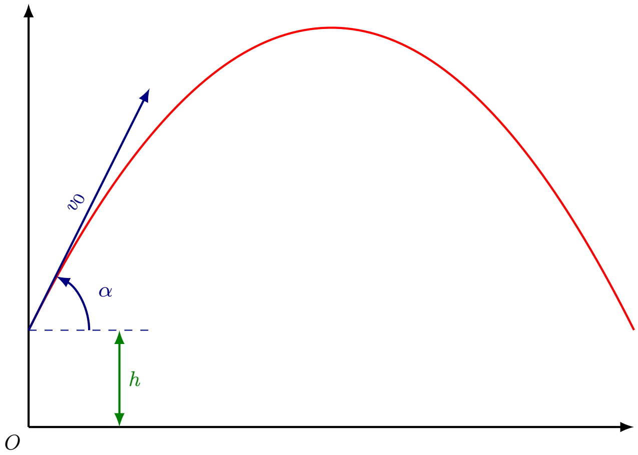
1re Spé Maths

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

Lycée Evariste Galois

I. Introduction et motivation

On lance un objet quelconque à partir d'une hauteur h par rapport au sol, avec un angle α par rapport à l'horizontale, et ce avec une vitesse initiale v_0. Le tout est rapporté à un repère, comme représenté ci-dessous :



Les lois de la mécanique newtonienne nous permettent de dire que l'équation de la trajectoire est :

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x + h\,,$$

où $g \approx 9,81$ sur Terre.
Si on souhaite connaître :

- le point culminant de la trajectoire,
- l'endroit où va tomber l'objet,

ou avoir d'autres informations sur cette trajectoire, il serait intéressant de savoir étudier les fonctions de la même forme, c'est-à-dire de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

C'est ce que nous allons faire dans ce chapitre.

Définition

On appelle **polynôme du second degré**, ou **polynôme de degré 2**, les polynômes de la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{avec} \quad a \neq 0,$$

où a, b et c sont trois nombres réels.

Exemples

1. $P_1(x) = 3x^2 - 5x + 2$ est un polynôme de degré 2 avec $a = 3$, $b = -5$ et $c = 2$.
2. $P_2(x) = -8x^2 + 4x - 7$ est un polynôme de degré 2 avec $a = -8$, $b = 4$ et $c = -7$.

II. Forme canonique

Définition

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2. On appelle **forme canonique** de P la forme suivante :

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta\,,$$

où $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.

Exemple

Considérons le polynôme $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$. Alors,

$$\alpha = -\frac{-5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$$

et donc,

$$\beta = P\left(\frac{5}{6}\right) = 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{6}\right) + 2 = -\frac{1}{12}.$$

Ainsi, la forme canonique de $P(x)$ est :

$$P(x) = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12}.$$

Propriété 1

Soit $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ la forme canonique d'un polynôme de degré 2.
Si $a > 0$, le tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Si $a < 0$, le tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Démonstration

Étudions le cas où $a > 0$: Pour tout x, y dans $]-\infty\ ;\ \alpha]$, tels que $x \leqslant y$, nous avons $x - \alpha \leqslant y - \alpha \leqslant 0$.
Or, la fonction carré est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$. Donc, $(x-\alpha)^2 > (y-\alpha)^2$. Dès lors, $a(x-\alpha)^2 > a(y-\alpha)^2$. Ainsi, $a(x-\alpha)^2 + \beta > a(y-\alpha)^2 + \beta$. Autrement dit, $P(x) > P(y)$. Ce qui revient à dire que P est décroissante sur $]-\infty\ ;\ \alpha]$.
Pour tout x, y dans $[\alpha\ ;\ +\infty[$, tels que $x \leqslant y$, $0 \leqslant x - \alpha \leqslant y - \alpha$.
Or, la fonction carré est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. Donc, $(x-\alpha)^2 < (y-\alpha)^2$. Dès lors, $a(x-\alpha)^2 > a(y-\alpha)^2$. Ainsi, $a(x-\alpha)^2 + \beta < a(y-\alpha)^2 + \beta$. Autrement dit, $P(x) < P(y)$. Ce qui revient à dire que P est croissante sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$.

Par analogie on obtient un résultat similaire dans le cas où $a < 0$.

III. Racines éventuelles

Définition

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$. On appelle **racines** de $P(x)$ les nombres x_i tels que $P(x_i) = 0$, c'est-à-dire les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

Exemple

1. $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$. $x = 1$ est une racine de $P(x)$, car $P(1) = 3 \times 1^2 - 5 \times 1 + 2 = 0$.
2. $Q(x) = x^2 + x - 6$. $x = -3$ est une racine de $Q(x)$, car $Q(-3) = (-3)^2 + (-3) - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$.

Propriété 2

Pour tous réels x et m, $x^2 + mx = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4}$.

Preuve :

Développons à l'aide de l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} &= x^2 + \cancel{2} \times \frac{m}{\cancel{2}} \times x + \left(\frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} \\ &= x^2 + mx + \cancel{\frac{m^2}{4}} - \cancel{\frac{m^2}{4}} \\ &= x^2 + mx.\end{aligned}$$

L'égalité est ainsi démontrée.

Considérons un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. Alors :

$$P(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right], \text{d'après la propriété 2}$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right], \text{en mettant au même dénominateur}$$

Cette dernière écriture nous pousse à considérer la définition suivante.

Définition

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
On appelle **discriminant** de $P(x)$ le nombre Δ (lire « delta ») défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Exemple :

On considère le polynôme $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$.
Son discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 - 24 = 1.$$

Nous cherchons à résoudre l'équation :

$$P(x) = 0$$

c'est-à-dire :

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0$$

d'après l'écriture trouvée précédemment. Comme $a \neq 0$, cette équation est équivalente à :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0\,,$$

c'est-à-dire :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2} \tag{E}$$

On voit alors que trois cas sont possibles :

- **Cas où $\boldsymbol{\Delta < 0}$.** L'équation (E) n'a pas de solution car un carré n'est jamais strictement négatif.

- **Cas où $\boldsymbol{\Delta = 0}$.** L'équation (E) est alors équivalente à :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

soit :

$$x + \frac{b}{2a} = 0$$

car $Y^2 = 0 \iff Y = 0$, en posant ici $Y = x + \dfrac{b}{2a}$.
Ainsi,

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

- **Cas où $\boldsymbol{\Delta > 0}$.** L'équation (E) est alors équivalente à :

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \\ &\iff x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \\ &\iff x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.\end{aligned}$$

De cette étude, on en déduit la propriété suivante :

Propriété 3

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, de discriminant Δ.

- Si $\Delta < 0$, $P(x)$ n'a pas de racine.
- Si $\Delta = 0$, $P(x)$ a une racine (dite « double ») :

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta > 0$, $P(x)$ a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Remarque :

Dans le cas où $\Delta > 0$, on dit que x_1 est l'**expression conjuguée** de x_2, et réciproquement.

Exemples

1. $P_1(x) = x^2 + x + 1$. Son discriminant est :

$$\Delta_1 = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0.$$

Donc $P(x)$ n'a pas de racine.

2. $P_2(x) = 4x^2 + 4x + 1$. Son discriminant est :

$$\Delta_2 = 4^2 - 4 \times 4 \times 1 = 16 - 16 = 0.$$

Donc $P(x)$ a une racine :

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times 4} = -\frac{1}{2}.$$

3. $P_3(x) = 2x^2 - 5x - 3$. Son discriminant est :

$$\Delta_3 = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 > 0.$$

Donc $P(x)$ a deux racines distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta_3}}{2a} \\ &= \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times 2} \\ &= \frac{-2}{4} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta_3}}{2a} \\ &= \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times 2} \\ &= \frac{12}{4} \\ &= 3. \end{aligned}$$

IV. Factorisation et signe d'un polynôme de degré 2

Propriété 4

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, de discriminant Δ.

- Si $\Delta < 0$ alors $P(x)$ ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$.
- Si $\Delta > 0$ alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines de $P(x)$.

Exemples

1. $P_1(x) = x^2 + x + 1$. Son discriminant est :

$$\Delta_1 = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0.$$

Donc $P(x)$ ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$.

2. $P_2(x) = 4x^2 + 4x + 1$. Son discriminant est :

$$\Delta_2 = 4^2 - 4 \times 4 \times 1 = 16 - 16 = 0.$$

Donc $P(x)$ a une racine :

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times 4} = -\frac{1}{2},$$

et donc :

$$\boxed{P(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2.}$$

3. $P_3(x) = 2x^2 - 5x - 3$. $P(x)$ a deux racines distinctes : $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 3$ d'après les calculs menés dans les exemples **??**.
Donc :

$$\boxed{P(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3),}$$

que l'on peut aussi écrire, en développant $2\left(x + \frac{1}{2}\right)$:

$$\boxed{P(x) = (2x + 1)(x - 3).}$$

La propriété suivante est une conséquence de la factorisation d'un polynôme de degré 2.

Propriété 5

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, de discriminant Δ.

- Si $\Delta < 0$ alors $P(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	$\text{sgn}(a)$	

- Si $\Delta = 0$ alors $P(x)$ est du signe de a, sauf pour $x = -\dfrac{b}{2a}$ où il s'annule.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$P(x)$		$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(a)$	

- Si $\Delta > 0$ alors $P(x)$ est du signe opposé de a entre les racines, et du signe de a ailleurs.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(-a)$	0	$\text{sgn}(a)$	

Exemples

$-\dfrac{1}{2}$ et 3 sont les racines de $P(x) = 2x^2 - 5x - 3$. Ainsi,

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

-4 et 1 sont les racines de $P(x) = -2x^2 - 6x + 8$. Ainsi,

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

-1 est la racine de $P(x) = -x^2 - 2x - 1$. Ainsi,

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$-$	

V. Somme et produit des racines

Propriété 6

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, dont le discriminant est supposé strictement positif.
On note alors x_1 et x_2 les deux racines de $P(x)$.
Alors,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Démonstration

D'après la propriété du discriminant, si $\Delta > 0$,

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

En développant le dernier membre de ces égalités, on obtient :

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2)\\
ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right]\\
ax^2 + bx + c &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2.
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité étant vraie pour toutes les valeurs de x, cela signifie que les coefficients sont égaux entre eux : $b = -a(x_1 + x_2)$ et $c = ax_1x_2$.
Autrement dit,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Propriété 7

Soient x_1 et x_2 deux nombres réels.
Posons :

$$S = x_1 + x_2 \qquad \text{et} \qquad P = x_1 x_2.$$

Alors, x_1 et x_2 sont les racines du polynôme :

$$x^2 - Sx + P.$$

Démonstration

Posons $f(x) = x^2 - Sx + P$, avec $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 x_2$.

- $$\begin{aligned} f(x_1) &= x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + x_1 x_2 \\ &= x_1^2 - x_1^2 - x_2 x_1 + x_1 x_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$
  Donc x_1 est une racine de $f(x)$.
- $$\begin{aligned} f(x_2) &= x_2^2 - (x_1 + x_2)x_2 + x_1 x_2 \\ &= x_2^2 - x_1 x_2 - x_2^2 + x_1 x_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$
  Donc x_2 est une racine de $f(x)$.