Produit scalaire

1re Spé Maths

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

Lycée Evariste Galois

I. Géométrie non repérée

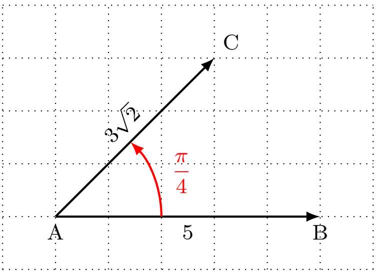
Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan est le nombre noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$$

où $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ représente l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et $\|\vec{u}\|$ la norme du vecteur $\vec{u}$.

Exemple

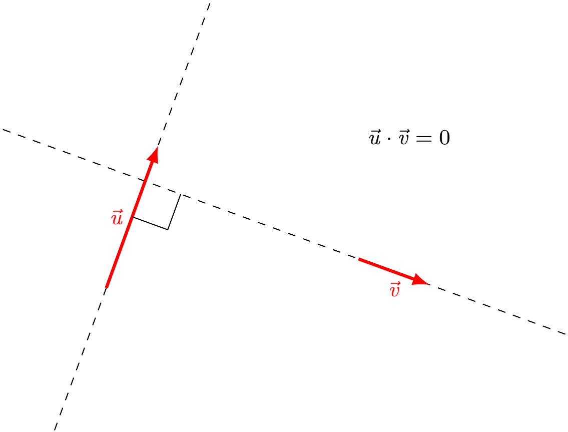


$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\\ &= 5 \times 3\sqrt{2} \times \cos\frac{\pi}{4}\\ &= 15\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= 15.\end{aligned}$$

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$



Démonstration

- Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
  Alors, $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ ou $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ et donc $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$. Ainsi,

  $$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times 0=0.$$

  Nous venons de démontrer que :

  $$\vec{u}\text{ et }\vec{v}\text{ orthogonaux}\Longrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0.$$

- Supposons maintenant que $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$; alors :

  $$\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0.$$

  Or, $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ donc $\|\vec{u}\|\neq 0$ et $\|\vec{v}\|\neq 0$. Cela implique que $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$, c'est-à-dire que $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ ou $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ (modulo 2π), et donc que les vecteurs sont orthogonaux.
  Nous venons de démontrer que :

  $$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Longrightarrow\vec{u}\text{ et }\vec{v}\text{ orthogonaux}.$$

Ainsi, nous avons ainsi démontré l'équivalence de la propriété.

Propriété

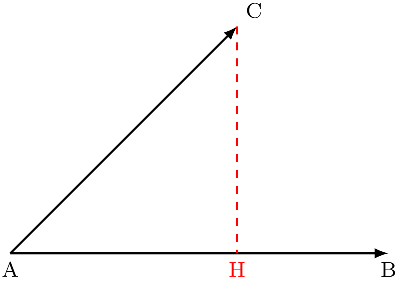
Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle aigu ;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle obtus.

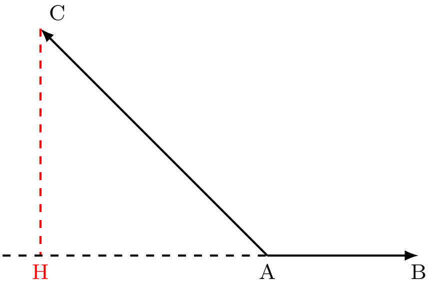
Démonstration

On place les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de sorte qu'ils aient la même origine.

On note alors $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.



- **1^er^ cas.**
$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)\\ &= \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)\\ &= \mathrm{AB} \times \mathrm{AH}.\end{aligned}$$

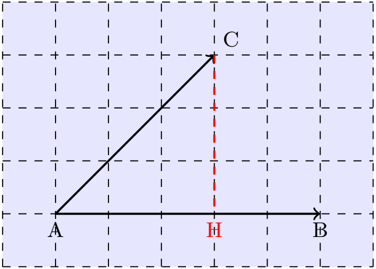


- **2^e^ cas.**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)\\ &= \mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\\ &= -\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\left(-\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\right)\\ &= -\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos\left(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{AC}\right)\\ &= -\mathrm{AB}\times\mathrm{AH}.\end{aligned}$$

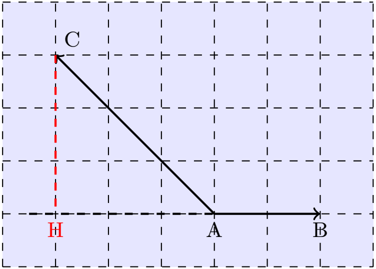
Exemples

Cas où l'angle est aigu.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= AB \times AH\\ &= 5 \times 3\\ &= 15.\end{aligned}$$

Cas où l'angle est obtus.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= -AB \times AH\\ &= -2 \times 3\\ &= -6.\end{aligned}$$

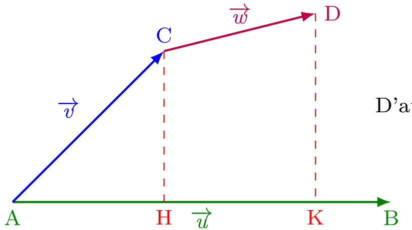
Propriété

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan. Alors,

$$\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}\ .$$

Démonstration

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ comme sur le schéma ci-dessous. On ne considèrera que le cas où les produits scalaires rencontrés sont positifs (car le cas où ils sont négatifs est similaire).



D'une part, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)&=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\\&=AB\times AK\ .\end{aligned}\tag{1}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=AB\times AH\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\\&=AB\times HK.\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w} &= \mathrm{AB}\times\mathrm{AH}+\mathrm{AB}\times\mathrm{HK}\\ &= \mathrm{AB}\times\left(\mathrm{AH}+\mathrm{HK}\right)\\ &= \mathrm{AB}\times\mathrm{AK}\,. \qquad (2)\end{aligned}$$

Des égalités (1) et (2), on peut déduire :

$$\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}\,.$$

Exemple

Quels que soient les points A, B, C et D du plan :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Propriété

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}.$$

Démonstration

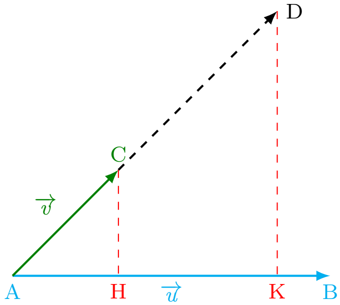
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \\
&= \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left[-\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\right)\right] \\
&= \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\right) && \text{car la fonction } x \mapsto \cos x \text{ est paire} \\
&= \|\overrightarrow{v}\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\right) && \text{car pour } a \text{ et } b \text{ réels, } a \times b = b \times a \\
&= \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}\ .
\end{aligned}$$

Propriété

Soit $k \in \mathbb{R}^*$, et soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs quelconques. Alors,

$$\left(k\overrightarrow{u}\right) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \left(k\overrightarrow{v}\right) = k\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right)\ .$$

Démonstration



Notons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $k\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$.
D'après le théorème de Thalès,

$$\text{AD} = k\text{AC} \Longrightarrow \text{AK} = k\text{AH}\ .$$

Donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \cdot \left(k\overrightarrow{v}\right) &= \text{AB} \times \text{AK} \\ &= \text{AB} \times k\text{AH} \\ &= k\text{AB} \times \text{AH} \end{aligned}$$

et

$$k\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right) = k\text{AB} \times \text{AH}\ .$$

Donc, $\overrightarrow{u} \cdot \left(k\overrightarrow{v}\right) = k\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right)$.

Un raisonnement analogue montrerait que $\left(k\overrightarrow{u}\right) \cdot \overrightarrow{v} = k\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right)$.

Propriété : Bilinéarité du produit scalaire

Soit $k \in \mathbb{R}^*$, et soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs quelconques. Alors,

$$\left(k\overrightarrow{u}\right) \cdot \left(k\overrightarrow{v}\right) = k^2\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right) .$$

Démonstration

D'après la propriété *résultat intermédiaire*,

$$\left(k\overrightarrow{u}\right) \cdot \left(k\overrightarrow{v}\right) = k\left(k\overrightarrow{u}\right) \cdot \overrightarrow{v} = k^2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}.$$

Propriété

Pour tous $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan :

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$.
2. $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

Démonstration

1. $$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} &= \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{u}\right) \\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \cos 0 \\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2. \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 &= \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right)^2 \\ &= \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2 \\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}. \end{aligned}$$

Propriété : Identités avec des normes

Pour tous $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right) .$$

Démonstration

- Nous avons vu précédemment que :

$$\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right)^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2 ,$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2 .$$

En isolant $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, on arrive à :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)} .$$

- En exploitant l'égalité :

$$\left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right)^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2 ,$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2 ,$$

on arrive à :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)}\,.$$

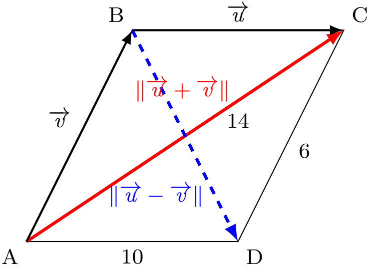
- En ajoutant les deux précédentes égalités, on a :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right) . \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)}\,.$$

Exemple : Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$, puis déduire BD.



- $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$
  $$= \frac{1}{2}\left(14^2 - 10^2 - 6^2\right)$$
  $$= 30.$$
- $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}|^2\right)$$
  $$30 = \frac{1}{4}\left(14^2 - AC^2\right)$$
  $$30 \times 4 = 196 - AC^2.$$

Ainsi, $AC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.

II. Géométrie repérée

Dans cette section, on rapporte le plan euclidien à un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ orthonormé.

Propriété

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{v}\binom{x'}{y'}$. Alors, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$.

Démonstration

D'après la propriété *identités avec des normes*,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right).$$

On sait que : $\|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2 + y^2$ et $\|\overrightarrow{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$ car on est dans un repère orthonormé.
De plus,

$$(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})\binom{x' - x}{y' - y}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 &= \left(x' - x\right)^2 + \left(y' - y\right)^2 \\ &= x'^2 - 2xx' + x^2 + y'^2 - 2yy' + y^2.\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+x'^2+y'^2-x'^2+2xx'-x^2-y'^2+2yy'-y^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(2xx'+2yy'\right)\\ &= xx'+yy'\ .\end{aligned}$$

Exemple

On pose $\overrightarrow{u}\binom{5}{-2}$ et $\overrightarrow{v}\binom{1}{7}$ deux vecteurs d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

Alors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= 5\times 1+(-2)\times 7\\ &= 5-14\\ &= -9.\end{aligned}$$

Reprenons les vecteurs de l'exemple précédent : $\overrightarrow{u}\binom{5}{-2}$ et $\overrightarrow{v}\binom{1}{7}$.
Nous avons vu que :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -9.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \\
&= \sqrt{5^2 + (-2)^2} \times \sqrt{1^2 + 7^2} \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \\
&= \sqrt{29} \times \sqrt{50} \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \\
&= 5\sqrt{58}\cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$-9 = 5\sqrt{58}\cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) ,$$

soit :

$$\cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = -\frac{9}{5\sqrt{58}} \approx -0,236351579148 .$$

On en déduit alors :

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \approx 104°.$$