La fonction exponentielle

1re Spé Maths

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

Lycée Evariste Galois

I. La méthode d'Euler

Activité - Corrigé

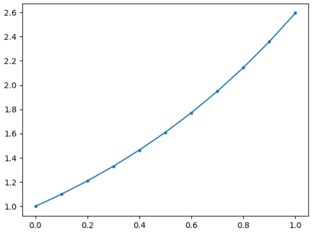
Objectif

Étudier et traiter LA fonction f vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$;
2. $f(0) = 1$.

Démarches

La démonstration de l'existence d'une telle fonction étant hors programme. Nous allons nous contenter de tracer sa courbe représentative en utilisant l'algorithme d'Euler. Pour cela, nous allons prendre des intervalles $[a; a+h]$, avec h très proche de 0, et par la suite assimiler la courbe représentative de f à sa tangente au point d'abscisse a. En effet, sur un intervalle assez petit $[a; a+h]$, la tangente est très proche de la courbe.



II. Unicité de la fonction exponentielle

Propriété fondamentale

Soit une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Pour tout réel x, $f(x) \times f(-x) = 1$ et $f(x) \neq 0$.

Démonstration

Posons $h(x) = f(x) \times f(-x)$. Alors, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Dès lors,

$$h'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times [-f'(-x)].$$

Or, $f'(x) = f(x)$. Ainsi,

$$h'(x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0.$$

La fonction h est donc constante sur $\mathbb{R}$.
Par ailleurs, $h(0) = f(0) \times f(-0) = 1 \times 1 = 1$. Donc, pour tout réel x, $h(x) = 1$. Autrement dit,

$$f(x) \times f(-x) = 1.$$

On en déduit de plus que f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, par conséquent $f(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}$.

Propriété

Il n'existe qu'une fonction f telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démonstration

Supposons qu'il existe deux fonctions f et g telles que :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} g' = g \\ g(0) = 1 \end{cases}.$$

Posons $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$, puisque d'après la propriété fondamentale, f ne s'annule jamais donc h est bien définie.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est le quotient de deux fonction dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur est différent de zéro. Ainsi,

$$h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g'(x)f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}.$$

Or, $g' = g$ et $f' = f$. Donc,

$$h'(x) = \frac{g(x)f(x) - f(x)g(x)}{\left[f(x)\right]^2} = 0.$$

On déduit alors que h est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. De plus, $h(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$.

Par conséquent, pour tout réel x, $h(x) = 1$, ce qui signifie que $g(x) = f(x)$.

III. Relations fonctionnelles

L'utilisation de la propriété *fondamentale* permet d'obtenir ce résultat.

Propriété

Pour tout réel x, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Propriété : Exponentielle d'une somme

Pour tous nombres réels x et y, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Démonstration

Posons $f(x) = \exp(x+y) \times \exp(-x)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp'(x+y) \times \exp(-x) + \exp(x+y) \times \left[-\exp'(-x) \right] \\ &= \exp(x+y) \times \exp(-x) - \exp(x+y) \times \exp(-x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On déduit alors que f est une fonction constante. Par ailleurs, $f(0) = \exp(0+y) \times \exp(-0) = \exp(y)$ donc, pour tout réel x,

$$f(x) = \exp(x+y) \times \exp(-x) = \exp(y) \ .$$

Autrement dit,

$$\exp(x+y) = \exp(y) \times \frac{1}{\exp(-x)} = \exp(y) \times \exp(x).$$

IV. Notation e^x

En mathématiques, il est de coutume de désigner par une lettre un nombre important dont l'écriture décimale est infinie. Tour comme le nombre transcendant π, le nombre irrationnel $\exp(1)$ est noté e.
Le nombre e est égal à l'image de 1 par la fonction exp. Et, comme vu précédemment, la méthode d'Euler permet d'estimer la valeur de e. En effet,

- $\exp(0,1) \approx (1+0,1)$;
- $\exp(0,2) \approx (1+0,1) \times \exp(0,1) \approx (1+0,1)^2$;
- $\exp(0,3) \approx (1+0,1) \times \exp(0,1) \approx (1+0,1)^3$;
- etc.

On peut alors écrire, pour h très proche de 0 et pour tout entier naturel n :

$$\exp(nh) \approx (1+h)^n.$$

Posons $h = \dfrac{1}{n}$. Dès lors, plus n est grand plus $\dfrac{1}{n}$ est proche de 0. On peut alors dire pour n assez grand,

$$\exp(1) \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Autrement dit, en prenant n de plus en plus grand, le nombre $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ se rapproche du nombre e. Avec une cette méthode, on obtient :

$$\boxed{e \approx 2,71828182846}$$

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$. Ainsi,

- $\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1) \times \exp(1) = \big(\exp(1)\big)^2 = e^2$;
- $\exp(3) = \exp(2+1) = \exp(2) \times \exp(1) = \big(\exp(1)\big)^3 = e^3$;
- $\vdots$
- $\exp(n) = \big(\exp(1)\big)^n = e^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

Ceci nous incite alors à simplifier l'écriture et remplacer $\exp(x)$ par e^x, sans pour autant avoir démontré l'égalité pour tout réel x (la démonstration nécessite un bagage plus conséquent).
Ainsi, à partir de maintenant, on notera quand même :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x.}$$

Par conséquent, les propriétés précédentes peuvent être notées comme suit.

Propriété

Pour tout réel x,

- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$;
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$;
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$;
- $e^0 = 1$;
- $\big(e^x\big)' = e^x$.

V. La suite (e^{na}), a réel

Soit a un réel. Considérons la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = e^{na}.$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = e^a$. En effet, pour tout entier naturel n.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{e^{(n+1)a}}{e^{na}} \\ &= e^{(n+1)a-na} \\ &= e^{na+a-na} \\ &= e^a.\end{aligned}$$

Propriété

Pour tout réel a et pour tout entier n, $\left(e^a\right)^n = e^{na}.$

Démonstration

(u_n) est une suite géométrique, on peut donc l'écrire sous la forme :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

avec $u_0 = e^0 = 1$. Ainsi, $u_n = \left(e^a\right)^n$.
Or, $u_n = e^{na}$. Donc, $\left(e^a\right)^n = e^{na}$.

VI. Étude de la fonction $x \mapsto e^x$

Propriété

La fonction $x \longmapsto e^x$ est strictement positive.

Démonstration

Quel que soit le réel x, on peut écrire :

$$e^x = e^{\frac{x}{2} \times 2}.$$

Ceci revient à dire :

$$e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Un carré étant toujours positif ou nul, cela signifie que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 0.$$

Or, d'après la propriété *fondamentale*,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \times e^{-x} = 1 \ .$$

Dès lors pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$. Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) > 0.$$

Propriété

La fonction $x \longmapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Par définition, on a :

$$\exp' = \exp\,.$$

De plus, pour tout réel x, $\exp(x) > 0$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) > 0\ ,$$

ce qui signifie que la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

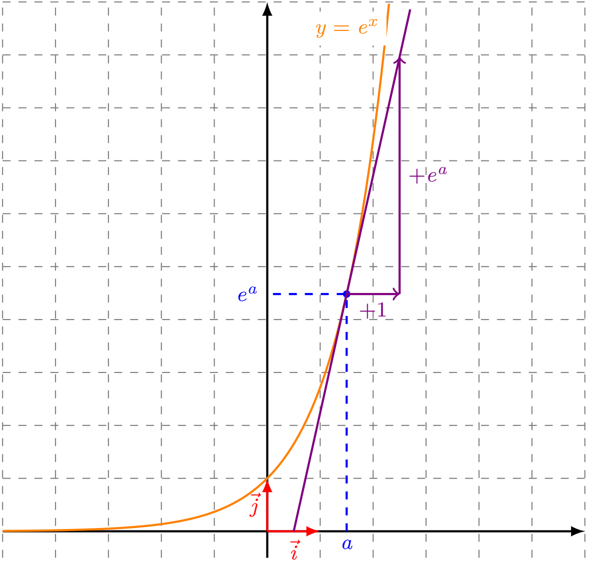
Propriétés

Pour tous réels x et y,

1. $x = y \iff e^x = e^y$.
2. $x \geqslant y \iff e^x \geqslant e^y$.
3. $x \leqslant y \iff e^x \leqslant e^y$.

Ces propriétés découlent de la stricte monotonie de la fonction $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$.

La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$ est la suivante.



En tout point d'abscisse a, le coefficient directeur de la tangente à la courbe est égal à e^a.

VI. Étude des fonctions $x \mapsto e^{kx}$

Posons $f(x) = e^{kx}$, où $k \in \mathbb{R}*$. Nous avons vu précédemment que la dérivée de toute fonction $g(ax+b)$ était égale à $ag'(ax+b)$. Ainsi,

$$f'(x) = ke^{kx}.$$

Pour tout réel x, $e^{kx} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de k. Ainsi,

- si $k < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;
- si $k > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Représentations graphiques de quelques fonctions type $x \mapsto e^{kx}$.