Devoir Surveillé n° 5

Corrigés - 30 minutes

Question 1 : (1 point)

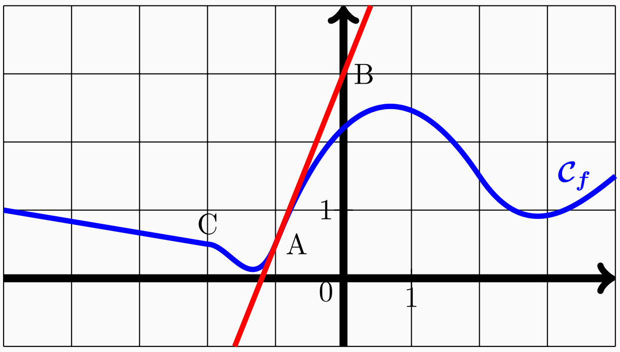
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et h un nombre réel non nul. On sait que :

$$\frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \frac{1}{2}h+3.$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{1}{2}h+3\right) = 3$. Donc, f est dérivable en 5 et $f'(5) = 3$.

Question 2 : (1 point)

Sur le graphique ci-dessous la tangente en $A\left(-1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ à la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-5\ ;\ 4]$ passe par le point $B(0\ ;\ 3)$.



Selon la représentation graphique :

— $f'(-1)$ est le coefficient directeur de l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1.

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \frac{y_B - y_B}{x_B - x_A} \\ &= \frac{3-\frac{1}{2}}{0-(-1)} \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

— f n'est pas dérivable en -2 car la courbe présente un point anguleux. Cela signifie que la courbe a deux demi-tangentes différentes à droite et à gauche en -2.

Question 3 : (1 point)

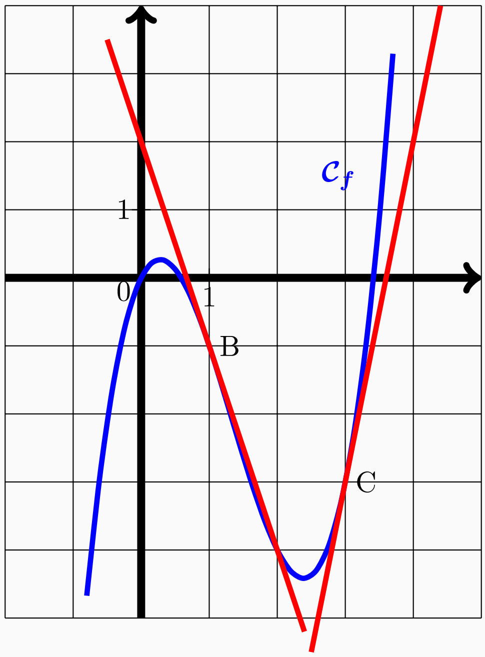
La courbe $\mathcal{C}_f$ représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, les droites tracées représentent les tangentes à $\mathcal{C}_f$ respectivement au point B d'abscisse 1 et au point C d'abscisse 3.

— $f'(1)$ est le coefficient directeur de l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1. Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{2-(-4)}{0-2} \\ &= \frac{6}{-2} \\ &= -3. \end{aligned}$$

— $f'(3)$ est le coefficient directeur de l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3. Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(3) &= \frac{2-(-3)}{5-4} \\ &= 5. \end{aligned}$$



Question 4 : (1 point)

La courbe représentative d'une fonction g admet une tangente au point d'abscisse 2. Cette tangente a pour équation $y = \frac{3}{4}x - 1$. $g'(2) = \frac{3}{4}$, car $g'(2)$ est le coefficient directeur de l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 2.

Question 5 : (1 point)

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sachant que $f(0) = 4$ et que $f'(0) = -7$.
L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0 est donnée par :

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ &= -7x + 4. \end{aligned}$$

Question 6 : (1 point)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longrightarrow x^2 + 8x - 2$.
Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f entre -2 et $-2+h$ est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} &= \frac{(-2+h)^2 + 8(-2+h) - 2 - (-14)}{h} \quad \text{car} \quad f(-2) = -14 \\ &= \frac{(-2)^2 + 2 \times (-2) \times h + h^2 - 16 + 8h - 2 - (-14)}{h} \\ &= \frac{4h + h^2}{h} \\ &= \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} \\ &= 4 + h. \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}(4+h)=4$. Donc, f est dérivable en -2 et $f'(-2)=4$.

Question 7 : (1 point)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=-\dfrac{2}{x}$.

Soit $h\neq 0$. Le taux d'accroissement de f entre -3 et $-3+h$ est donné par :

$$\begin{aligned}
\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} &= \frac{\dfrac{-2}{-3+h}-\dfrac{2}{3}}{h} \quad \text{avec} \quad h\neq 3 \quad \text{et} \quad f(-3)=\frac{2}{3}.\\
&= \frac{\dfrac{-6}{3(-3+h)}-\dfrac{2(-3+h)}{3(-3+h)}}{h}\\
&= \frac{-6-2(-3+h)}{3(-3+h)}\times\frac{1}{h}\\
&= \frac{\cancel{-6}+\cancel{6}-2\cancel{h}}{3(-3+h)}\times\frac{1}{\cancel{h}}\\
&= \frac{-2}{3(-3+h)}.
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2}{3(-3+h)}=\dfrac{2}{9}$. Donc, f est dérivable en -3 et $f'(-3)=\dfrac{2}{9}$.

Question 8 : (1 point)

Soit u la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par : $u(x)=\sqrt{x-1}$.
Soit $h>2$. Le taux d'accroissement de u en 2 est donné par :

$$\begin{aligned}
\frac{u(2+h)-u(2)}{h} &= \frac{\sqrt{2+h-2}-\sqrt{2-2}}{h}\\
&= \frac{\sqrt{h}}{h}\\
&= \frac{1}{\sqrt{h}}.
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(2+h)-u(2)}{h}=+\infty(\notin\mathbb{R})$, ne converge pas. Donc, u n'est pas dérivable en 2. u admet tout de même une tangente en 2 mais verticale, d'équation $x=2$.

Question 9 : (1 point)

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par :

$$f(x)=x^3-\frac{1}{x}.$$

Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en 2 est donné par :

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} & = & \dfrac{(1+h)^3 - \dfrac{1}{1+h}}{h} \quad \text{où} \quad f(1)=0 \\
& = & \dfrac{(1+3h+3h^2+h^3) - \dfrac{1}{1+h}}{h} \\
& = & \dfrac{(1+h)(1+3h+3h^2+h^3)-1}{1+h} \times \dfrac{1}{h} \\
& = & \dfrac{1+3h+3h^2+h^3+h+3h^2+3h^3+h^4-1}{h(1+h)} \\
& = & \dfrac{4h+6h^2+4h^3+h^4}{h(1+h)} \\
& = & \dfrac{\cancel{h}(4+6h+4h^2+h^3)}{\cancel{h}(1+h)} \\
& = & \dfrac{4+6h+4h^2+h^3}{1+h}.
\end{array}$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4+6h+4h^2+h^3}{1+h} = 4$. Donc, f est dérivable en 1 et $f'(1) = 4$.

Question 10 : (1 point)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (2x^2 - 5x + 4)^{10}.$$

On admet que g est dérivable en 1, et que $g'(1) = -10$.

L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1 est donnée par :

$$\begin{array}{rcl}
y & = & g'(1)(x-1) + g(1) \\
& = & -10(x-1) + 1 \\
& = & -10x + 11.
\end{array}$$