Devoir Maison n°3

Exercice 1 : (4 points)

On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n, par $w_n = \dfrac{n+2(-1)^n}{n+2}$.

1. (a) Déterminer l'expression de w_n pour les entiers naturels n pairs.
   (b) Déterminer l'expression de w_n pour les entiers naturels n impairs, puis simplifier l'expression.
2. Soient (p_n) et (i_n) les suites définies, pour tout entier naturel n, par $p_n = w_{2n}$ et $i_n = w_{2n+1}$.
   (a) Donner l'expression de p_n en fonctionde n.
   Que remarque-t-on ?
   (b) Exprimer i_n et i_{n+1} en fonction de n. En déduire que la suite (i_n) est croissante.
3. Que peut-on dire sur la monotonie de (w_n) ?

Exercice 2 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1}.$$

1. Démontrer que f est une fonction impaire, c'est-à-dire que, pour tout x réel, $f(-x) = -f(x)$.
   Comment serait alors représentée f dans un repère ?
2. (a) Démontrer que, pour tout x réel :
   $$f(x) = x + 1 - \frac{2}{1+e^{-x}}.$$
3. (a) Démontrer que, pour tout x réel :
   $$f'(x) = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}.$$
   (b) En déduire le tableau de variation de f.

Exercice 3 : (4 points)

On souhaite résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$4\cos^2 x - 2(1+\sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 0 \qquad (1)$$

1. On effectue un changement de variable.
   On pose $X = \cos x$ avec $x \in [-1 \ ; \ 1]$.
   (a) Quelle équation du second degré est équivalente à (1) ?
   (b) Montrer que son discriminant peut s'écrire :
   $4(1-\sqrt{3})^2$.
   (c) Déterminer les solutions de cette équation du second degré.
2. En déduire les solutions de l'équation (1) dans $]-\pi \ ; \ \pi]$ puis dans $\mathbb{R}$.

Bon courage !