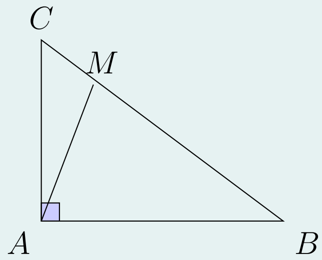
Devoir Maison n°1

Exercice 1 : (4 points)

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AB = 4$ et $AC = 3$. On cherche la position du point M sur le segment $[BC]$ telle que la distance AM soit minimale.



1. (a) Préciser le repère orthonormé $\mathscr{R}$ dans lequel les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(0\,;\,0)$, $(4\,;\,0)$ et $(0\,;\,3)$.
   (b) Déterminer l'équation de la droite (BC) dans ce repère.
   (c) Quelle relation peut-on en déduire pour les coordonnées de M ?
2. Soit f la fonction qui à l'abscisse x de M dans ce repère associe la distance AM^2 pour $x \in [0\ ;\ 4]$.
   (a) Montrer que $f(x) = \dfrac{25}{16}\left(x - \dfrac{36}{25}\right)^2 + \dfrac{144}{25}$.
   (b) Quel est le minimum de f sur $[0\ ;\ 4]$?
   En déduire la distance AM minimale et les coordonnées du point M correspondantes.

Exercice 2 : (2 points)

L'objectif est de résoudre l'équation suivante : $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = 1$.

1. Deux valeurs sont à exclure d'emblée de l'ensemble des solutions. Lesquelles ?
2. Montrer que cette équation équivaut à : $(x+1) + (x-1) = (x-1)(x+1)$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation.

Exercice 3 : (4 points)

1. Soit f une fonction dérivable en a. Alors : $\dfrac{f(a-h) - f(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \dots$
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x : $f(-x) = f(x)$ (on dit que f est paire).
   (a) Soit $M(a\ ;\ f(a))$ et $N(-a\ ;\ f(-a))$. Quel est le lien géométrique entre M et N ?
   (b) Démontrer que pour tout réel a : $f'(-a) = -f'(a)$.
   (c) Que peut-on alors dire de $f'(0)$?
3. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x : $f(-x) = -f(x)$ (on dit que f est impaire).
   (a) Soit $M(a\ ;\ f(a))$ et $N(-a\ ;\ f(-a))$. Quel est le lien géométrique entre M et N ?
   (b) Démontrer que pour tout réel a : $f'(-a) = f(a)$.

Bon courage !