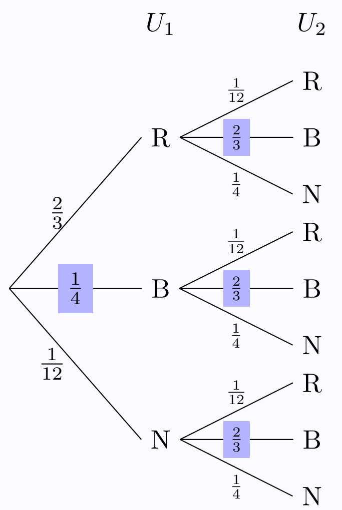
Corrigés

Exercice n°1

1. L'arbre de probabilités complété est le suivant :



2. La probabilité d'avoir deux boules rouges est : $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{18}$.
La probabilité d'avoir deux boules blanches est : $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6}$.
La probabilité d'avoir deux boules noires est : $\dfrac{1}{12} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{48}$.
Ainsi, la probabilité d'avoir deux boules de la même couleur est :
$$\frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{48} = \frac{35}{144}.$$
Par conséquent, la probabilité d'avoir deux boules de couleurs différentes est :
$$1 - \frac{35}{144} = \frac{109}{144}.$$
Le gain algébrique du joueur peut être -5 € (s'il paie 5 € pour jouer et s'il ne gagne pas) ou 5 € (s'il paie 5 € et qu'il gagne 10 €). On a alors :

X	-5	5
$p(X)$	$\dfrac{109}{144}$	$\dfrac{35}{144}$

3. L'espérance mathématique de X est : $E(X) = -5 \times \dfrac{109}{144} + 5 \times \dfrac{35}{144}$
$E(X) = -\dfrac{185}{72} \approx -2{,}57$.
Cela signifie que si l'on participe un grand nombre de fois à ce jeu, on peut « espérer » perdre en moyenne 2,57 €.

4. La variance de X est :
$$V(X) = \frac{109}{144}\left[-5 - \left(-\frac{185}{72}\right)\right]^2 + \frac{35}{144}\left[5 - \left(-\frac{185}{72}\right)\right]^2$$
$$= \frac{95\,375}{5\,184} \approx 18{,}4.$$

Ainsi, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
$\approx \sqrt{18{,}4}$
$\sigma(X) \approx 4{,}29$.

L'écart-type représentant l'écart moyen à l'espérance, le joueur peut espérer avoir un gain algébrique entre $E(X) - \sigma(X) \approx -6{,}86$ € et $E(X) + \sigma(X) \approx 1{,}72$ €.

Exercice n°2

On dispose d'un dé cubique, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et d'un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). Ces dés sont parfaitement équilibrés.
On lance ces deux dés et on s'intéresse à la somme des deux chiffres obtenus.
Soit X la variable aléatoire représentant l'ensemble des sommes possibles.

1. L'ensemble des sommes possibles est donné par le tableau suivant :

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

On a alors :

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(X)$	$\dfrac{1}{24}$	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{1}{24}$

2. $E(X) = 2 \times \dfrac{1}{24} + 3 \times \dfrac{1}{12} + \cdots + 10 \times \dfrac{1}{24}$
$E(X) = 6$.

3. La variance de X est : $V(X) = \dfrac{25}{6}$ donc son écart-type est $\sigma X = \dfrac{5}{\sqrt{6}} \approx 2$.

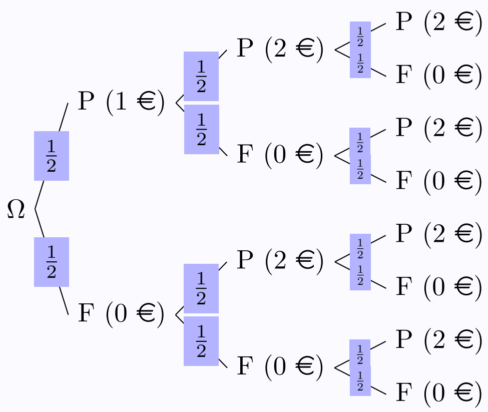
Exercice n°3

1. Si on obtient trois fois « pile » ou trois fois « face », on gagne 100 €. Sinon, on perd 10 € (ce qui correspond à un gain de -10 €).
Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire représentant le gain algébrique de ce jeu.
2. On ajoute 5 € aux gains. Quelle est alors l'espérance et quel est l'écart-type de la nouvelle variable aléatoire représentant le gain algébrique du jeu ?
3. On multiplie par 2 les gains du jeu initial. Calculer alors l'espérance et l'écart-type de la nouvelle variable aléatoire représentant le gain algébrique du jeu.

Exercice n°4

On lance 3 pièces bien équilibrées valant respectivement 1 €, 2 € et 2 €.
On veut étudier la variable aléatoire X qui totalise le montant en euros des pièces tombées sur « Pile ».

1. L'arbre est le suivant :



2. On a : X $= \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$ d'après l'arbre précédent, d'où la loi de probabilité suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5
p(X$=x_i$)	$\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$2\times\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. $p(X \geqslant 3) = p(X=3)+p(X=4)+p(X=5) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice n°5

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
Dans U_1, il y a n boules noires et 10 boules blanches.
Dans U_2, il y a 10 boules noires et $n+1$ boules blanches.

1. La probabilité de tirer deux boules noires est :
$$\frac{n}{n+10}\times\frac{10}{n+11}=\frac{10n}{(n+10)(n+11)}.$$
La probabilité de tirer deux boules blanches est :
$$\frac{10}{n+10}\times\frac{n+1}{n+11}=\frac{10(n+1)}{(n+10)(n+11)}.$$
La probabilité de tirer deux boules de même couleur est la somme de ces deux probabilités donc :
$$\frac{10(2n+1)}{(n+10)(n+11)}.$$

2. Posons $f(x)=\dfrac{10(2x+1)}{(x+10)(x+11)}=\dfrac{20x+10}{x^2+21x+110}$.
Alors,
$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{20(x^2+21x+110)-(20x+10)(2x+21)}{(x^2+21x+110)^2}\\&=\frac{20x^2+420x+2\,200-40x^2-420x-20x-210}{(x^2+21x+110)^2}\\&=\frac{-20x^2-20x+1\,990}{(x^2+21x+110)^2}\\&=\frac{10(-2x^2-2x+199)}{(x^2+21x+110)^2}\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $-2x^2-2x+19$ est :
$$\Delta = 4+8\times 199 = 1\,596.$$
Il a donc deux racines :
$$x_1=\frac{2-\sqrt{1\,596}}{-4}=\frac{-1+\sqrt{399}}{2}>0$$
et
$$x_2=\frac{2+\sqrt{1\,596}}{-4}=\frac{-1-\sqrt{399}}{2}<0.$$
On a alors le tableau suivant :

x	0		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗		↘	

On voit alors que $f(x)$ atteint son maximum pour $x=\dfrac{-1+\sqrt{399}}{2}\approx 9$.

Ainsi, pour $n=9$, la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur est maximale.

Exercice n°6

Pour une mise de 0,50 €, on lance un dé cubique équilibré. Tout résultat pair fait gagner le nombre d'euros indiqué sur le dé et tout résultat impair fait perdre le nombre d'euros indiqué sur le dé. Par exemple, obtenir 2 permet de gagner 2 € mais obtenir 3 fait perdre 3 €.
On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique (en tenant compte de la mise).

1. La loi de probabilité de X est :

$X=x_i$	$-1{,}5$	$1{,}5$	$-3{,}5$	$3{,}5$	$-5{,}5$	$5{,}5$
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. Le jeu est équitable si l'espérance mathématique de X est nulle.
$$\begin{aligned}E(X)&=(-1{,}5+1{,}5-3{,}5+3{,}5-5{,}5+5{,}5)\times\frac{1}{6}\\&=0.\end{aligned}$$
Le jeu est donc équitable.

Exercice n°7

Voici trois lois de probabilité ainsi que trois couples (espérance; écart-type).

X	8	14
$p(X)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Y	8	12
$p(Y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Z	4	10	16
$p(Z)$	$\frac{1}{100}$	$\frac{98}{100}$	$\frac{1}{100}$

— Le couple 2 correspond à la variable Z. En effet, $\dfrac{98}{100}=0{,}98$ est très fort par rapport aux autres probabilités.

Ainsi, l'espérance est très proche de 10 et l'écart-type est certainement très faible. Donc des couples 2 et 3, on choisit le 2.

— Le couple 1 correspond à Y. En effet, $\frac{3}{4}$ est plus grand que $\frac{1}{4}$, donc l'espérance va plus se rapprocher de 12 que de 8. Elle ne peut donc pas être égale à 10 (qui est le centre de [8 ; 12].

— Il nous reste le couple 3 pour X.

Exercice n°8

Dans une fête foraine, pour une mise initiale de 3 €, le joueur est invité à lancer deux dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6.

1. La loi de probabilité de G est :

$G = g_i$	-3	-2	-1	0	1	2	3	5	7
$p(G = g_i)$	$\frac{24}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. $E(G) = -3 \times \frac{24}{36} - 2 \times \frac{1}{36} + \cdots + 9 \times \frac{1}{36}$
$\approx -1{,}25.$
L'espérance étant non nulle, le jeu n'est pas équitable.

3. $\sigma(G) \approx 3{,}1$. Ainsi, sur un grand nombre de parties, le gain moyen par partie varie entre $-1{,}25 - 3{,}1 = -4{,}35$ € et $-1{,}25 + 3{,}1 = 1{,}85$ €.

Exercice n°9

Voici la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

X	50	100	200	500
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$E(X) = 235 \qquad \text{et} \qquad \sigma(X) = \sqrt{33\,525} = 15\sqrt{149}.$$

De plus, on sait que :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

On cherche donc a et b afin d'avoir :

$$aE(X) + b = 0 \iff 235a + b = 0 \iff b = -235a.$$

De plus,

$$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

On souhaite que $\sigma(aX + b) = 1$ donc :

$$|a|\sigma(X) = 1 \iff |a| = \frac{1}{15\sqrt{149}}.$$

On en déduit alors que :

$$\text{si } a = \frac{1}{15\sqrt{149}} \text{ alors } b = -\frac{235}{15\sqrt{149}}.$$

Dans ce cas, la nouvelle variable aléatoire sera :

$$Y = \frac{X - 235}{15\sqrt{149}} = \left\{-\frac{37}{3\sqrt{149}}\ ;\ -\frac{9}{\sqrt{149}}\ ;\ -\frac{7}{3\sqrt{149}}\ ;\ \frac{53}{3\sqrt{149}}\right\}.$$

De plus,

$$\text{si } a = -\frac{1}{15\sqrt{149}} \text{ alors } b = \frac{235}{15\sqrt{149}}.$$

Dans ce cas, la nouvelle variable aléatoire sera :

$$Z = -Y = \left\{\frac{37}{3\sqrt{149}}\ ;\ \frac{9}{\sqrt{149}}\ ;\ \frac{7}{3\sqrt{149}}\ ;\ -\frac{53}{3\sqrt{149}}\right\}.$$

Exercice n°10

On dispose d'une urne contenant 1 boule noire, 1 boule rouge, 2 boules jaunes et 3 boules bleues.
Un jeu consiste à effectuer deux tirages successifs sans remise dans cette urne.

— quand on tire une boule noire au 1$^{\text{er}}$ ou 2$^{\text{nd}}$ tirage, on ne gagne rien ;

— quand on tire une boule bleue au 2$^{\text{nd}}$ tirage, on gagne 1 € ;

— quand on tire une boule jaune au 2$^{\text{nd}}$ tirage, on gagne 5 € ;

— quand on tire une boule rouge au 2$^{\text{nd}}$ tirage, on gagne 10 €.

1. L'arbre est présenté page suivante (faute de place sur celle-ci), en fin de corrigé.

2. D'après l'arbre précédent,
— $X{-}3 = \frac{1}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$
— $X{-}2 = \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{14}$
— $X2 = \frac{1}{7} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{21}$
— $X7 = \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{42}$
La loi de probabilité de X est alors :

x_i	-3	-2	2	7
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{5}{42}$

3. $E(X) = (-3) \times \frac{2}{7} + (-2) \times \frac{5}{14} + 2 \times \frac{5}{21} + 7 \times \frac{5}{42} = -\frac{11}{42}$.
Ainsi, le jeu est plutôt défavorable au joueur.

4. $E(X) = -\frac{11}{42}$ donc il faut ajouter à la mise de départ $\frac{11}{42}$ €, soit à peu près 0,26 €.
La mise de départ doit donc être égale à $3 - 0{,}26 = 2{,}74$ €.

5. (a) Les gains *absolus* du jeu initial sont donnés par X + 3 (on ne considère pas ici la mise de départ de 3 €). Si on multiplie tous les gains absolus par a, les nouveaux gains sont donnés par la variable aléatoire $a(\mathrm{X} + 3) = a\mathrm{X} + 3a$. En tenant compte de la mise souhaitée m, on arrive à la variable aléatoire $\mathrm{Y} = a\mathrm{X} + 3a - m$.

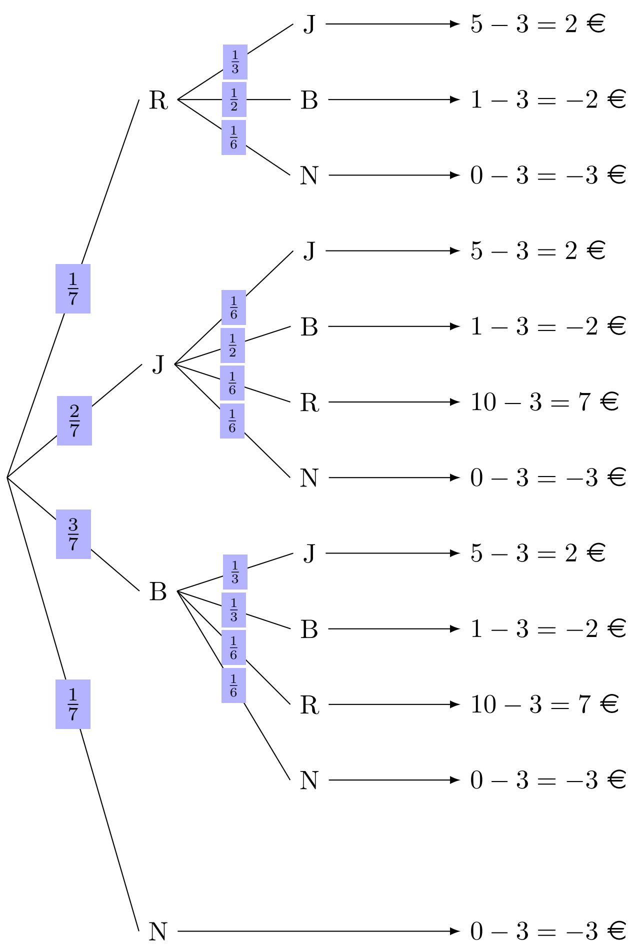
(b) $E(Y) = E(aX + 3a - m) = aE(X) + 3a - m$ par linéarité de l'espérance.
Ainsi, $E(Y) = -\frac{11a}{42} + 3a - m$.
Si le jeu est équitable, il faut que $(Y) = 0$, donc :

$$-\frac{11a}{42} + 3a - m = 0,$$

soit,

$$m = -\frac{11a}{42} + 3a = \left(-\frac{11}{42} + \frac{3 \times 42}{42}\right) a = \frac{115}{42}.$$

Par conséquent, l'organisateur doit fixer la mise de départ à $\frac{115}{42}$ € (soit à peu près 2,74 €) pour que le jeu soit équitable avec ces nouvelles règles.



Exercice n°11

Une maladie touche 20% de la population d'une ville. Lors d'un dépistage de la maladie, on utilise un test biologique vendu par une entreprise qui a les caractéristiques suivantes :

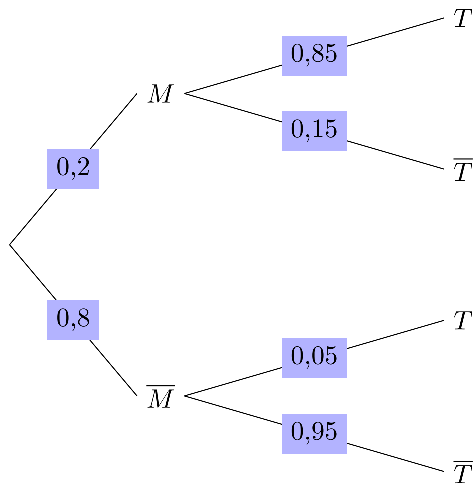
— lorsque la personne est malade, la probabilité d'avoir un test positif est 0,85 ;

— lorsque la personne n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,95.

On choisit une personne au hasard dans cette population.

On note T l'événement « la personne a un test positif à cette maladie »et M l'événement « la personne est atteinte de cette maladie ».

1. L'arbre complété est le suivant :



2. $p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T)$
   $p(M \cap T) = 0{,}2 \times 0{,}85$
   $p(M \cap T) = 0{,}17$.
3. M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers (la population de la ville) donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} p(T) &= p(M \cap T) + p(\overline{M} \cap T) \\ &= 0{,}17 + 0{,}8 \times 0{,}05 \\ p(T) &= 0{,}21. \end{aligned}$$

4. Dans cette question, on nous demande de calculer $p_T(M)$.

$$\begin{aligned} p_T(M) &= \frac{p(M \cap T)}{p(T)} \\ &= \frac{0{,}17}{0{,}21} \\ p_T(M) &= \approx 0{,}81. \end{aligned}$$

   $p_T(M) < 0{,}95$ par conséquent, le test n'est pas estimé efficace.
5. Notons X la variable aléatoire représentant la recette de l'entreprise qui commercialise les tests, exprimée en euro. Alors, $X = \{5; -5\}$. D'après les calculs précédents, la loi de probabilité de X est :
   — $p(X = 5) = p(M \cap T) + p(\overline{M} \cap \overline{T}) = 0{,}17 + 0{,}76 = 0{,}93$;
   — $p(X = 5) = p(M \cap \overline{T}) + p(\overline{M} \cap T) = 1 - 0{,}93 = 0{,}07$.

X	-5	5
$p(X)$	0,07	0,93

   L'espérance mathématique de X est alors :

$$\begin{aligned} E(X) &= -5 \times 0{,}07 + 5 \times 0{,}93 \\ E(X) &= 4{,}3. \end{aligned}$$

   La recette moyenne d'un test est donc égale à 4,3 €.