Corrigés

Série d'exercices — Classe : 1re SPE — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

1. $\dfrac{17\pi}{3} = \dfrac{(6\times 3-1)\pi}{3} = 6\pi - \dfrac{\pi}{3}$ donc la mesure principale est $-\dfrac{\pi}{3}$.
2. $-\dfrac{8\pi}{3} = -\dfrac{(2\times 3+2)\pi}{3} = -\dfrac{6\pi}{3} - \dfrac{2\pi}{3} = 2\pi - \dfrac{2\pi}{3}$; la mesure principale est donc $-\dfrac{2\pi}{3}$.
3. $\dfrac{9\pi}{5} = \dfrac{(2\times 5-1)\pi}{5} = \dfrac{10\pi}{5} - \dfrac{\pi}{5} = 2\pi - \dfrac{\pi}{5}$; la mesure principale est donc $-\dfrac{\pi}{5}$.
4. $-\dfrac{2\,015\pi}{6} = -\dfrac{(336\times 6-1)\pi}{6} = -336\pi + \dfrac{\pi}{6}$; la mesure principale est donc $\dfrac{\pi}{6}$.
5. $\dfrac{9\,999\pi}{7}$.
   $9\,999 \div 7 \approx 1\,428{,}4$ donc on écrit :
   $\dfrac{9\,999\pi}{7} = \dfrac{(1\,428\times 7+3)\pi}{7} = 1\,428\pi + \dfrac{3\pi}{7}$. Ainsi, la mesure principale est $\dfrac{3\pi}{7}$.
6. $-\dfrac{78\pi}{9} = -\dfrac{(8\times 9+6)\pi}{9} = -8\pi - \dfrac{6\pi}{9} = -8\pi - \dfrac{2\pi}{3}$. La mesure principale est donc $-\dfrac{2\pi}{3}$.
7. $\dfrac{89\pi}{9} = \dfrac{(10\times 9-1)\pi}{9} = 10\pi - \dfrac{\pi}{9}$ donc la mesure principale est $\dfrac{\pi}{9}$.
8. $-\dfrac{107\pi}{13} = -\dfrac{(8\times 13+3)\pi}{13} = -8\pi - \dfrac{3\pi}{13}$ donc la mesure principale est $-\dfrac{3\pi}{13}$.
9. $\dfrac{21\pi}{2} = \dfrac{(10\times 2+1)\pi}{2} = 10\pi + \dfrac{\pi}{2}$ donc la mesure principale est $\dfrac{\pi}{2}$.
10. $-\dfrac{123\,321\pi}{123} = -\dfrac{(1\,002\times 123+75)\pi}{123} = -1\,002\pi - \dfrac{75\pi}{123}$ donc la mesure principale est $-\dfrac{75\pi}{123}$.

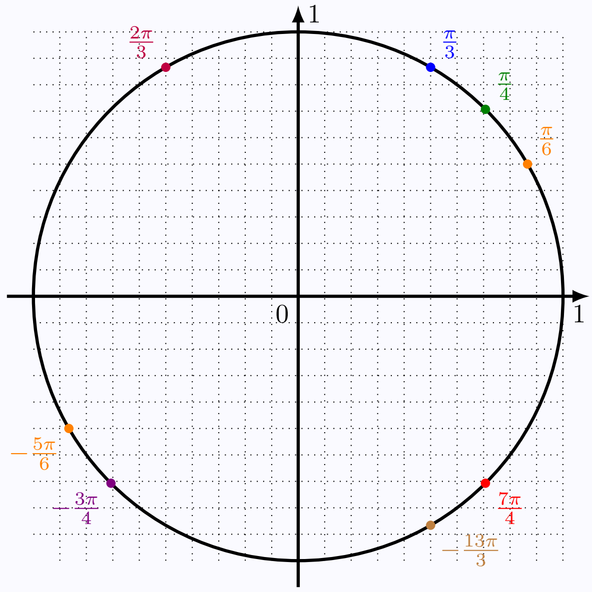
Exercice n°2

— A : $\dfrac{5\pi}{6}$. — D : $\dfrac{\pi}{6}$. — F : $\dfrac{3\pi}{4}$.
— B : $-\dfrac{\pi}{3}$. — E : $-\dfrac{5\pi}{6}$. — G : $\dfrac{\pi}{4}$.
— C : $\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice n°3

1. $\dfrac{7\pi}{18}$ radians correspond à $\dfrac{7\times 180°}{18} = 70°$.
2. $72° = 72 \times \dfrac{\pi}{180}$ radians $= \dfrac{2\pi}{5}$ radians.

Exercice n°4



Exercice n°5

1. $\cos\dfrac{215\pi}{6} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\sin\dfrac{316\pi}{6} = \sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice n°6

1. $0 < \dfrac{\pi}{5} < \dfrac{\pi}{2}$ donc $\sin\dfrac{\pi}{5} > 0$. De plus, d'après le cours, pour tout réel x, $\cos^2 + \sin^2 x = 1$ donc, en prenant $x = \dfrac{\pi}{5}$, cela donne :

$$\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^2 = 1$$
$$\iff \left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^2 = 1 - \left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^2$$
$$\iff \left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$$
$$\iff \left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^2 = 1 - \frac{1+2\sqrt{5}+5}{16}$$
$$\iff \left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^2 = \frac{16-6-2\sqrt{5}}{16}$$
$$\iff \left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$
$$\iff \sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

1. $\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$ donc $\cos x \leqslant 0$. De plus,

$$\begin{aligned}\cos^x + \sin^2 x = 1 &\iff \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\ &\iff \cos^2 x = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 \\ &\iff \cos^2 x = 1 - \frac{16}{25} \\ &\iff \cos^2 x = \frac{9}{25} \\ &\iff \cos x = -\frac{3}{5}.\end{aligned}$$

2. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 = 2+\sqrt{3}$.

De plus, $$\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{2+2\sqrt{12}+6}{4} = \frac{8+2\sqrt{4\times 3}}{4} = \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = \frac{4(2+\sqrt{3})}{4} = 2+\sqrt{3}.$$

Ainsi, $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)^2$, donc $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

$0 < \dfrac{7\pi}{12} < \pi$ donc $\sin\dfrac{7\pi}{12} > 0$. Donc,

$$\begin{aligned}\sin\frac{7\pi}{12} &= \sqrt{1-\cos^2\frac{7\pi}{12}} \\ &= \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{1-\frac{2-2\sqrt{12}+6}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{8+2\sqrt{12}}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{8+2\sqrt{4\times 3}}{16}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\frac{7\pi}{12} &= \sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.\end{aligned}$$

Exercice n°7

1. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} > 1$; or, pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

   Donc $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ ne peut pas représenter un sinus.

2. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$$\begin{aligned}&\iff \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}\right)^2 \\ &\iff \cos^2\alpha = 1 - \frac{2+2\sqrt{6}+3}{16} \\ &\iff \cos^2\alpha = \frac{11-2\sqrt{6}}{16} \\ &\iff \boxed{\cos\alpha = -\sqrt{\frac{11-2\sqrt{6}}{16}} \text{ ou } \cos\alpha = \sqrt{\frac{11-2\sqrt{6}}{16}}}.\end{aligned}$$

Exercice n°8

$$\begin{aligned}&\left(\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}\right)^2 \\ &= \cos^2\frac{\pi}{5} + 2\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5} + \sin^2\frac{\pi}{5} \\ &\qquad + \cos^2\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5} + \sin^2\frac{\pi}{5} \\ &= 2\underbrace{\left(\cos^2\frac{\pi}{5}+\sin^2\frac{\pi}{5}\right)}_{=1 \text{ car } \cos^2 x + \sin^2 x = 1} \\ &= 2.\end{aligned}$$

Exercice n°9

1. Calculons $\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

   Remarquons avant tout que :

$$\frac{3\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} - \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}.$$

   Ainsi,

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \\ &= 1.\end{aligned}$$

2. Calculons $\sin^2\left(\frac{6\pi}{7}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)$.

   Remarquons avant tout que :

$$\frac{6\pi}{7} = \frac{7\pi}{7} - \frac{\pi}{7} = \pi - \frac{\pi}{7}.$$

   Ainsi,

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\frac{6\pi}{7}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) &= \sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

3. Calculons $\sin\left(\frac{13\pi}{22}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{11}\right)$.

Remarquons avant tout que :

$$\frac{13\pi}{22} = \frac{11\pi}{22} + \frac{2\pi}{22} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{11}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{13\pi}{22}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{11}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{11}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{11}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{11}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{11}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

4. Calculons $1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{13}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi}{26}\right)$.

Remarquons avant tout que :

$$\frac{11\pi}{26} = \frac{13\pi}{26} - \frac{2\pi}{26} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{13}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}&1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{13}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi}{26}\right)\\ &= 1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{13}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{13}\right)\\ &= 1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{13}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{13}\right)\\ &= 1 + 1\\ &= 2.\end{aligned}$$

Exercice n°10

1. $\cos x = \frac{1}{2} \iff \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

$\iff x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$ sur $[0; 2\pi[$.

2. $\sin x = \frac{1}{2} \iff \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

$\iff x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ sur $[0; 2\pi[$.

Exercice n°11

Résoudre les équations et inéquations sur $]-\pi; \pi]$:

1. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\iff \cos(x) = -\cos\frac{\pi}{6}$

$\iff \cos(x) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$\iff \cos(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$\iff x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = -\frac{5\pi}{6}$ sur $]-\pi; \pi]$.

2. $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\iff x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$ sur $]-\pi; \pi]$.

3. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\iff \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\iff 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in$

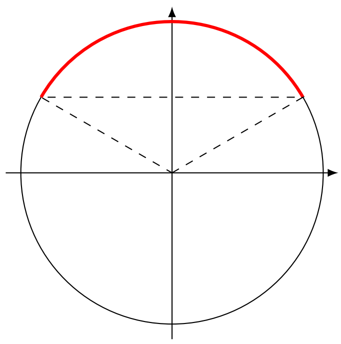
$\iff 2x = 0 + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{2\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\iff x = k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, sur $]-\pi; \pi]$, les solutions sont (en prenant $k = 0$ et $k = 1$) : 0, π, $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

4. Pour résoudre l'inéquation $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{1}{2}$, on peut poser $X = 3x - \frac{\pi}{6}$ dans un premier temps.

$$\sin X \geqslant \frac{1}{2} \iff \sin X \geqslant \sin\frac{\pi}{6} \iff \frac{\pi}{6} \leqslant X \leqslant \pi - \frac{\pi}{6}$$



$\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{1}{2}$

$\iff \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant 3x - \frac{\pi}{6} \leqslant \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in$

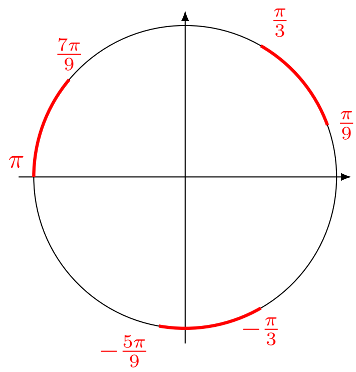
$\iff \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 3x \leqslant \pi + 2k\pi$, $k \in$

$\iff \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in$

— Pour $k = 0$, on obtient : $\frac{\pi}{9} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$.

— Pour $k = -1$, on obtient : $-\frac{5\pi}{9} \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{3}$.

— Pour $k = 1$, on obtient : $\frac{7\pi}{9} \leqslant x \leqslant \pi$.



Exercice n°12

On considère l'équation d'inconnue x suivante :

$$81^{\sin^2(x)} + 81^{\cos^2(x)} = 30. \qquad \text{(E)}$$

1. Le discriminant de $v^2-30v+81$ est :

$$\Delta=(-30)^2-4\times 1\times 81=576=24^2.$$

Donc l'équation $v^2-30v+81=0$ admet deux solutions :

$$v_1=\frac{30-24}{2}=3 \qquad \text{et} \qquad v_2=27.$$

2. En posant $v=81^{\sin^2(x)}$, et en tenant compte du fait que pour tout réel x, $\cos^2(x)=1-\sin^2(x)$,

$$\begin{aligned}
(E) &\iff v+\frac{81}{v}=30\\
&\iff v^2+81=30v\\
&\iff v^2-30v+81=0\\
&\iff v=3 \text{ ou } v=27\\
&\iff \left(3^4\right)^{\sin^2(x)}=3 \text{ ou } \left(3^4\right)^{\sin^2(x)}=3^3\\
&\iff 3^{4\sin^2(x)}=3^1 \text{ ou } 3^{4\sin^2(x)}=3^3\\
&\iff 4\sin^2(x)=1 \text{ ou } 4\sin^2(x)=3\\
&\iff \sin^2(x)=\frac{1}{4} \text{ ou } \sin^2(x)=\frac{3}{4}\\
&\iff \sin(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&\text{ou } \sin(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $81^{\sin^2(x)}+81^{\cos^2(x)}=30$ est donc :

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\quad;\;-\frac{\sqrt{3}}{2}\;;\;\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

Exercice n°13

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x)=\big(\cos x+\sin x\big)^2+\big(\cos x-\sin x\big)^2.$$

Développons $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x)&=\big(\cos x+\sin x\big)^2+\big(\cos x-\sin x\big)^2\\
&=\cos^2 x+\cancel{2\cos x\sin x}+\sin^2 x+\cos^2 x-\\
&\quad\cancel{2\cos x\sin x}+\sin^2 x\\
&=2(\cos^2 x+\sin^2 x)\\
&=2\times 1\\
&=2.
\end{aligned}$$

Exercice n°14

On définit la fonction f par :

$$f(x)=\frac{\cos(x)}{1+\sin^4(x)}.$$

On sait que $\cos(x+2\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2\pi)=\sin x$. Par conséquent, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
f(x+2\pi)&=\frac{\cos(x+2\pi)}{1+\big(\sin(x+2\pi)\big)^4}\\
&=\frac{\cos x}{1+(\sin x)^4}\\
&=f(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, f est 2π-périodique.

Exercice n°15

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\cos^3(x)\cos(3x).$$

— Montrons d'abord que f est π-périodique.

$$\begin{aligned}
f(x+\pi)&=\big[\cos(x+\pi)\big]^3\cos\big(3(x+\pi)\big)\\
&=\big[-\cos x\big]^3\cos(3x+3\pi)\\
&=-\cos^3 x\cos(3x+\pi)\\
&=-\cos^3 x\big(-\cos(3x)\big)\\
&=\cos^3 x\cos(3x)\\
f(x+\pi)&=f(x).
\end{aligned}$$

Donc f est π-périodique.
On peut donc réduire l'intervalle d'étude à un intervalle d'amplitude π, par exemple $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

— Montrons que f est paire. D'abord, le domaine de définition de f est centré en 0. De plus,

$$\begin{aligned}
f(-x)&=\big[\cos(-x)\big]^3\cos(-3x)\\
&=\big[\cos x\big]^3\cos(3x)\\
&=\cos^3 x\cos(3x)\\
f(-x)&=f(x).
\end{aligned}$$

Donc f est paire.

Exercice n°16

$$f(x)=\sin^3(x)\cos(3x).$$

— Montrons d'abord que f est π-périodique.

$$\begin{aligned}
f(x+\pi)&=\big[\sin(x+\pi)\big]^3\cos\big[3(x+\pi)\big]\\
&=\big[-\sin x\big]^3\cos(3x+3\pi)\\
&=-\sin^3 x\cos(3x+\pi)\\
&=-\sin^3 x\big[-\cos(3x)\big]\\
&=\sin^3 x\cos(3x)\\
f(x+\pi)&=f(x).
\end{aligned}$$

La fonction f est donc π-périodique ; on peut donc restreindre l'intervalle d'étude de f à un intervalle d'amplitude π, par exemple $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

— Montrons que f est impaire. Le domaine de définition de f est centré en 0. De plus,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \left[\sin(-x)\right]^3 \cos(-3x) \\ &= \left[-\sin x\right]^3 \cos(3x) \\ &= -\sin^3 x \cos(3x) \\ f(-x) &= -f(x). \end{aligned}$$

La fonction f est donc impaire ; on peut donc réduire l'intervalle d'étude précédent à sa moitié, donc à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice n°17

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + \sin(x) - \frac{1}{2}\cos(2x).$$

1. Le domaine de définition de f est , donc centré en 0. De plus,

$$\begin{aligned} f(-x) &= 1 + \sin(-x) - \frac{1}{2}\cos(-2x) \\ &= 1 - \sin(x) - \frac{1}{2}\cos(2x) \end{aligned}$$

car la fonction sin est impaire (donc $\sin(-x) = -\sin x$) et la fonction cos est paire (donc $\cos(-2x) = \cos(2x)$). Ainsi, $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$; la fonction f n'est donc ni paire, ni impaire.

2. $$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= 1 + \sin(x + 2\pi) - \frac{1}{2}\cos\left[2(x + 2\pi)\right] \\ &= 1 + \sin x - \frac{1}{2}\cos(2x + 4\pi) \\ &= 1 + \sin x - \frac{1}{2}\cos(2x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Donc f est 2π-périodique.

Exercice n°18

n considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + \cos(x) + \sin^2(x).$$

1. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(-x) &= 1 + \cos(-x) + \left[\sin(-x)\right]^2 \\ &= 1 + \cos(x) + \left[-\sin(x)\right]^2 \\ &= 1 + \cos(x) + \sin^2(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Par conséquent, f est paire.
On peut alors déduire que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Pour tout réel x,

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= 1 + \cos(x + 2\pi) + \sin^2(x + 2\pi) \\ &= 1 + \cos(x) + \sin^2(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Par conséquent, f est bien 2π-périodique.

Cela signifie qu'en traçant la représentation graphique de f sur un intervalle quelconque d'amplitude 2π, et en en faisant les translations de vecteurs $k\vec{i}$, $k \in^*$, on obtiendra la courbe représentative de f sur .

3. Pour tout réel x,

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x).$$

Ainsi, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \cos(x) + \sin^2(x) \\ &= 1 + \cos(x) + 1 - \cos^2(x) \\ &= -\cos^2(x) + \cos(x) + 2. \end{aligned}$$

4. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff -\cos^2(x) + \cos(x) + 2 = 0 \\ &\iff -X^2 + X + 2 = 0, \quad \text{en posant } X = \cos(x). \end{aligned}$$

Une solution évidente est $X_1 = -1$; par conséquent, la seconde solution est telle que :

$$X_1 X_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{-1} = -2.$$

Ainsi,

$$-1 \times X_2 = -2 \iff X_2 = 2.$$

On a alors :

$$\begin{cases} X_1 = \cos(x_1) = -1 \\ X_2 = \cos(x_2) = 2 \longleftarrow \text{ impossible car } -1 \leqslant \cos(x_2) \leqslant 1 \end{cases}$$

On en déduit que sur $]-\pi; \pi]$, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les valeurs de x pour lesquelles :

$$\cos(x) = -1 \iff x = \pi.$$

5. D'après la question précédente, pour tout réel X,

$$-X^2 + X + 2 = -(X + 1)(X - 2).$$

Ainsi, en prenant $X = \cos(x)$, on a :

$$f(x) = -\big(\cos(x) + 1\big)\big(\cos(x) - 2\big).$$

Or,

$$\begin{aligned} -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 &\iff \begin{cases} \cos(x) + 1 \geqslant 0 \\ \cos(x) - 2 \leqslant 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -\big(\cos(x) + 1\big) \leqslant 0 \\ \cos(x) - 2 \leqslant 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) \geqslant 0$.

Exercice n°19

On applique une tension sinusoïdale u aux bornes d'un circuit électrique comportant en série une résistance et une diode idéale.
Le temps t est exprimé en seconde.
La tension est donnée par la fonction u définie pour tout réel $t \geqslant 0$ par :

$$u(t) = \sqrt{3}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

La diode est non passante si $u(t) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ et elle est passante si $u(t) > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. $u(0) = \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc la diode est passante pour $t = 0$.
2. $$\begin{aligned} u\left(\frac{1}{100}\right) &= \sqrt{3}\sin\left(100\pi \times \frac{1}{100} + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sqrt{3}\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ u\left(\frac{1}{100}\right) &= -\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$
   La tension est négative, donc la diode n'est pas passante.
3. $u\left(t + \frac{2}{100}\right) = u(t)$ pour tout $t \geqslant 0$. Cela signifie que u est périodique, de période $\frac{2}{100}$. La tension de la diode sera donc la même à intervalle régulier de $\frac{1}{50}$ seconde.

Exercice n°20

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Aucune justification n'est demandée mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.

1. Soit f la fonction définie sur par $f(x) = \sin(x) - x$.
   Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?
   (a) f est paire.
   (b) f est impaire.
   (c) Pour tout réel x, $f(x + 2\pi) = f(x)$.
   (d) Pour tout réel x, $f(x + \pi) = -f(x)$.
2. Dans l'intervalle -$\pi\pi, l'quation 2\cos(x) - \sqrt{3} = 0$ a pour solutions :
   (a) $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$.
   (b) $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.
   (c) $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.
   (d) $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.
3. Le nombre réel $-\frac{3\pi}{4}$ est associé au même point du cercle trigonométrique que le réel :

   (a) $-\frac{14\pi}{4}$. (b) $\frac{7\pi}{4}$. (c) $\frac{13\pi}{4}$. (d) $\frac{19\pi}{4}$.