Exercice n°1

Dans chacun des cas suivants, dire si la suite (u_n) est définie par sa *relation de récurrence* ou par sa *formule explicite*. Donner ensuite les valeurs des 4 premiers termes.

1. $u_n = 2n^2 - 3n + 1$ pour tout entier naturel n.
   (u_n) est ici définie à l'aide d'une formule explicite (en fonction de n, sans faire référence au terme précédent).

   Les trois premiers termes de cette suite sont :
   — $u_0 = 2 \times 0^2 - 3 \times 0 + 1 = 1$.
   — $u_1 = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 0$.
   — $u_2 = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 3$.
2. $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$
   (u_n) est ici définie à l'aide d'une relation de récurrence (le terme u_{n+1}, de rang $n+1$, est défini en fonction de u_n, donc de son terme précédent).

   Les trois premiers termes de cette suite sont :
   — $u_0 = -2$ (donné).
   — $u_1 = 3u_0 - 2 = 3 \times (-2) - 2 = -8$.
   — $u_2 = 3u_1 - 2 = 3 \times (-8) - 2 = -26$.
3. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 1n \end{cases}$
   (u_n) est ici définie à l'aide d'une relation de récurrence.

   Les trois premiers termes de cette suite sont :
   — $u_0 = 1$ (donné).
   — $u_1 = u_0^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$.
   — $u_2 = u_1^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$.
4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3n \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$
   (u_n) est ici définie à l'aide d'une relation de récurrence (le terme u_{n+1}, de rang $n+1$, est défini en fonction de u_n, donc de son terme précédent, même s'il y a un terme en n avec lui).

   Les trois premiers termes de cette suites sont :
   — $u_0 = 1$ (donné).
   — $u_1 = u_{0+1} = 2u_0 - 3 \times 0 = 2 \times 1 = 2$.
   — $u_2 = u_{1+1} = 2u_1 - 3 \times 1 = 2 \times 4 - 3 = 5$.

Exercice n°2

Étudie du sens de variation des suites (u_n).

1. $u_n = \dfrac{2^n}{5}$.
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2^{n+1}}{5} - \frac{2^n}{5} = \frac{2^{n+1} - 2^n}{5} \\ &= \frac{2^n \times 2^1 - 2^n \times 1}{5} = \frac{2^n(2^1 - 1)}{5} \\ &= \frac{2^n}{5}. \end{aligned}$$
$u_{n+1} - u_n > 0$.

2. $u_n = \dfrac{2^n}{5}$.
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2^{n+1}}{5} - \frac{2^n}{5} = \frac{2^{n+1} - 2^n}{5} \\ &= \frac{2^n \times 2^1 - 2^n \times 1}{5} = \frac{2^n(2^1 - 1)}{5} \\ &= \frac{2^n}{5} \end{aligned}$$
$u_{n+1} - u_n > 0$.

   Ainsi, (u_n) est croissante.

3. $u_n = -n^2 + 5n - 2$.
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -(n+1)^2 + 5(n+1) - 2 - (-n^2 + 5n - 2) \\ &= -(n^2 + 2n + 1) + 5n + 5 - 2 + n^2 - 5n + 2 \\ &= -n^2 - 2n - 1 + 5n + 5 - 2 + n^2 - 5n + 2 \\ &= -2n + 4. \end{aligned}$$
   $-2n + 4 > 0 \iff -2n > -4 \iff n < 2$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$ pour $n \geqslant 2$.
   La suite (u_n) est donc décroissante à partir du rang 2.

3. $u_n = \sqrt{n^2 + 3}$.
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{(n+1)^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 3} \\ &= \sqrt{n^2 + 2n + 4} - \sqrt{n^2 + 3}. \end{aligned}$$
   Or, $n^2 + 4 > n^2 + 3$ donc $n^2 + 2n + 4 > n^2 + 3$ (car $n \geqslant 0$), donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
   Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

4. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - 5$.
   $u_{n+1} - u_n = u_n - 5 - u_n = -5 < 0$ donc (u_n) est décroissante.

Exercice n°3

On définit la suite (u_n) par la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{2n+1}{n+2}.$$

1. On calcule pour tout entier naturel n :
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+1} - \frac{2n+1}{n+2} \\ &= \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} \\ &= \frac{(2n+3)(n+2)}{(n+3)(n+2)} - \frac{(2n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{3}{(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$
   $n + 2 > 0$ et $n + 3 > 0$ car $n \in$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
   La suite (u_n) est donc croissante.

2. Si la suite (u_n) est majorée par 2, alors $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_n - 2 &= \frac{2n+1}{n+2} - 2 \\ &= \frac{2n+1}{n+2} - \frac{2(n+2)}{n+2} \\ &= \frac{2n+1-2n-4}{n+2} \\ &= \frac{-3}{n+2}. \end{aligned}$$

$-3 < 0$ et $n+2 > 0$ donc $u_n - 2 < 0$, soit $u_n < 2$.

Donc la suite est majorée par 2.

3. La suite est croissante donc, nécessairement, $u_n \geqslant u_0$ pour tout entier naturel n, soit $u_n \geqslant \frac{1}{2}$.

La suite est donc minorée par $\frac{1}{2}$.

Exercice n°4

La suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+1}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

est croissante. En effet, on calcule $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n^2+1} - u_n \\ &= \frac{\left(\sqrt{u_n^2+1} - u_n\right)\left(\sqrt{u_n^2+1} + u_n\right)}{\sqrt{u_n^2+1} + u_n} \\ &= \frac{u_n^2+1-u_n^2}{\sqrt{u_n^2+1} + u_n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{u_n^2+1} + u_n}. \end{aligned}$$

$u_n > 0$ car chaque terme est défini comme étant égal à une racine carrée.
De plus, $\sqrt{u_n^2+1} > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
La suite est donc croissante.

Exercice n°5

On définit la suite (u_n) par la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,.$$

1. $$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

2. $u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$.

Or, $n+2 > n$ donc $\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$ et donc, en ajoutant $\sqrt{n+1}$ aux deux membres de cette dernière inégalité, on a $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

En inversant, on obtient : $\dfrac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ (attention à ne pas oublier d'inverser le signe de l'inégalité).

Ceci nous dit alors que $u_{n+1} < u_n$, et donc que

$$(u_n)$$

est décroissante.

3. $\sqrt{n+1}\sqrt{n} > 0$ donc $u_n > 0$.
(u_n) est donc minorée par 0.

De plus, $\sqrt{n+1}\sqrt{n} \geqslant 1$ (car $\sqrt{n+1} \geqslant 1$ et $\sqrt{n} \geqslant 0$) donc $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \leqslant 1$, soit $u_n \leqslant 1$.
(u_n) est donc majorée par 1.

Exercice n°6

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n^2 - u_n + 1 - u_n \\ &= u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} \geqslant u_n$, donc (u_n) est croissante.

Exercice n°7

Dans chaque cas, dire si la suite (u_n) est arithmétique.
Si tel est le cas, donner le premier terme u_0 et la raison de la suite, ainsi que la relation de récurrence.

1. $u_n = 3 + 2n$.
La fonction $x \mapsto 3 + 2x$ est une fonction affine donc $f(n) = u_n$ est une suite arithmétique. Son premier terme est $u_0 = f(0) = 3$ et sa raison r est le coefficient de n, donc ici $r = 2$.
Dans ce cas, la relation de récurrence de un est :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$

2. $u_n = -3n + 4$.
La fonction $x \mapsto -3x + 4$ est une fonction affine donc $f(n) = u_n$ est une suite arithmétique. Son premier terme est $u_0 = f(0) = 4$ et sa raison r est le coefficient de n, donc ici $r = -3$.
Dans ce cas, la relation de récurrence de un est :
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$$
3. $u_n = 2n^2 - 1$.
La fonction $x \mapsto 2x^2 - 3$ n'est pas une fonction affine, donc $f(n) = u_n$ n'est pas une suite arithmétique.
Autre méthode : $u_0 = -1$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 7$.
Ainsi, $u_1 - u_0 = 2$ et $u_2 - u_1 = 6 \neq u_1 - u_0$ donc la suite n'est pas arithmétique.
4. $u_n = 3(n-2) - 2(n+1)$.
On peut écrire : $u_n = 3n - 6 - 2n - 2 = n - 8$. La fonction $x \mapsto x - 8$ est une fonction affine donc $f(n) = u_n$ est une suite arithmétique. Son premier terme est $u_0 = f(0) = -8$ et sa raison r est le coefficient de n, donc ici $r = 1$.
Dans ce cas, la relation de récurrence de un est :
$$\begin{cases} u_0 = -8 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$$
5. $u_n = \dfrac{5n+7}{2}$.
On peut écrire : $u_n = \dfrac{5n}{2} + \dfrac{7}{2} = \dfrac{5}{2}n + \frac{7}{2}$.
La fonction $x \mapsto \dfrac{5}{2}x + \dfrac{7}{2}$ est une fonction affine donc $f(n) = u_n$ est une suite arithmétique. Son premier terme est $u_0 = f(0) = \dfrac{7}{2}$ et sa raison r est le coefficient de n, donc ici $r = \dfrac{5}{2}$.
Dans ce cas, la relation de récurrence de un est :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{7}{2} \\ u_{n+1} = u_n + \frac{5}{2} \end{cases}$$
6. $u_n = n\sqrt{5}$.
La fonction $x \mapsto x\sqrt{5}$ est une fonction affine (même linéaire) donc $f(n) = u_n$ est une suite arithmétique. Son premier terme est $u_0 = f(0) = 0$ et sa raison r est le coefficient de n, donc ici $r = \sqrt{5}$.
Dans ce cas, la relation de récurrence de un est :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \sqrt{5} \end{cases}$$
7. $u_n = 3 - n\sqrt{2}$.
La fonction $x \mapsto 3 - x\sqrt{2}$ est une fonction affine donc $f(n) = u_n$ est une suite arithmétique. Son premier terme est $u_0 = f(0) = 3$ et sa raison r est le coefficient de n, donc ici $r = -\sqrt{2}$.
Dans ce cas, la relation de récurrence de un est :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - \sqrt{2} \end{cases}$$
8. $u_n = 7 - \dfrac{3}{n+2}$.
$u_0 = 7 - \dfrac{3}{0+2} = \dfrac{11}{2}$.
$u_1 = 7 - \dfrac{3}{1+2} = 6$.
$u_2 = 7 - \dfrac{3}{2+2} = \dfrac{25}{4}$.
Ainsi, $u_1 - u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_2 - u_1 = \dfrac{1}{4} \neq u_1 - u_0$ donc un n'est pas une suite arithmétique.
9. $u_n = 3$.
Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 3 - 3 = 0$, qui est un nombre constant, donc un est une suite arithmétique de raison $r = 0$ et de premier terme $u_0 = 3$.
Dans ce cas, la relation de récurrence de un est :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n \end{cases}$$

Exercice n°8

Dans chacun des cas suivants, dire si la suite (u_n) est arithmétique. Si tel est le cas, donner le terme général en fonction de n.

1. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n - \sqrt{2} \end{cases}$. D'après cette définition, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} - u_n = (u_n - \sqrt{2}) - u_n = -\sqrt{2}.$$
La différence entre deux termes consécutifs quelconque est donc toujours la même ; par conséquent, (u_n) est une suite arithmétique, ici de raison $r = -\sqrt{2}$.
D'après le cours, son terme général est :
$$u_n = u_0 + nr = -1 - n\sqrt{2}.$$
2. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$. D'après cette définition, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} - u_n = (2u_n + 1) - u_n = u_n + 1.$$
La différence entre deux termes consécutifs quelconque n'est donc pas toujours la même ; par conséquent, (u_n) n'est pas une suite arithmétique.
3. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 3 \end{cases}$. D'après cette définition, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} - u_n = (u_n^2 + 3) - u_n = u_n^2 - u_n + 3.$$
La différence entre deux termes consécutifs quelconque n'est donc pas toujours la même ; par conséquent, (u_n) n'est pas une suite arithmétique.
4. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$. D'après cette définition, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} - u_n = (u_n + 2) - u_n = 2.$$

La différence entre deux termes consécutifs quelconque est donc toujours la même ; par conséquent, (u_n) est une suite arithmétique, ici de raison $r = -2$.

D'après le cours, son terme général est :

$u_n = u_1+(n-1)r = -1+(n-1)\times(-2) = -1-2n+2 = 1-2n.$

Exercice n°9

On considère une suite (u_n) arithmétique de raison r.

1. $u_0 = 3$ et $u_8 = 7$. Calculer r.
   On sait que :
   $$u_n = u_0 + nr$$
   donc :
   $$\begin{aligned} u_8 &= u_0 + 8r \\ 7 &= 3 + 8r \\ 7-3 &= 8r \\ r &= \frac{4}{8} \\ r &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
2. $u_2 = 5$ et $u_5 = 2$. Calculer r.
   On sait que :
   $$u_n = u_k + (n-k)r$$
   donc
   $$\begin{aligned} u_5 &= u_2 + (5-2)r \\ 2 &= 5 + 3r \\ 2-5 &= 3r \\ 3r &= -3 \\ r &= -1. \end{aligned}$$
3. $u_0 = 5$ et $r = -\frac{1}{2}$. Calculer u_9.
   On sait que :
   $$u_n = u_0 + nr$$
   donc
   $$\begin{aligned} u_9 &= u_0 + 9r \\ u_9 &= 5 - \frac{9}{2} \\ u_9 &= \frac{10}{2} - \frac{9}{2} \\ u_9 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
4. $u_5 = 6$ et $r = 2$. Calculer u_{20}.
   On sait que :
   $$u_n = u_k + (n-k)r$$
   donc
   $$\begin{aligned} u_{20} &= u_5 + (20-5)r \\ u_{20} &= 6 + 15\times 2 \\ u_{20} &= 6 + 30 \\ u_{20} &= 36. \end{aligned}$$
5. $u_7 = \sqrt{2}$ et $u_2 = \sqrt{7}$. Calculer r.
   On sait que :
   $$u_n = u_k + (n-k)r$$
   donc
   $$\begin{aligned} u_7 &= u_2 + (7-2)r \\ \sqrt{2} &= \sqrt{7} + 5r \\ 5r &= \sqrt{2} - \sqrt{7} \\ r &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{5}. \end{aligned}$$

Exercice n°10

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

1. Si $u_0 = 5$ et $r = 3$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$.
   (u_n) est une suite arithmétique donc :
   $$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$$
   donc ici :
   $$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_{100} &= \frac{5 + (5 + 100\times 3)}{2} \times 101 \\ &= 155 \times 101 \\ u_0 + u_1 + \cdots + u_{100} &= 15655. \end{aligned}$$
2. Si $u_0 = 3$ et $u_{50} = 60$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{50}$.
   $$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_{50} &= \frac{3+60}{2} \times 51 \\ &= 31{,}5 \times 51 \\ u_0 + u_1 + \cdots + u_{100} &= 1606{,}5. \end{aligned}$$
3. Si $u_1 = 60$ et $r = 5$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.
   $$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} &= \frac{u_1 + u_{100}}{2} \times 100 \\ &= \frac{60 + (60 + 5\times 99)}{2} \times 100 \\ &= \frac{61500}{2} \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} &= 30750. \end{aligned}$$
4. Si $u_1 = 50$ et $u_{50} = 1$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{50}$.
   $$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_{50} &= \frac{u_1 + u_{50}}{2} \times 50 \\ &= \frac{50+1}{2} \times 50 \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_{50} &= 1275. \end{aligned}$$

Exercice n°11

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_0 = 7820$ et $u_2 = 6712$.

1. (u_n) étant arithmétique, $u_2 - u_0 = 2r$.
   Or, $u_2 - u_0 = 6712 - 7820 = -1108$. Donc $2r = -1108$, d'où $r = -554$.
   Ainsi, la relation de récurrence de (u_n) est :
   $$\begin{cases} u_0 = 7820 \\ u_{n+1} = u_n - 554 \end{cases}.$$

2. D'après la formule du cours, $u_n = u_0 + nr$, donc ici, pour tout entier naturel n :

$$\underline{u_n = 7820 - 554n.}$$

3. Il s'agit ici de trouver le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 1000$. Pour cela, on va calculer tous les termes successifs jusqu'à celui qui est inférieur à 1000.

   Il y a deux façons de procéder :

   — **à l'aide de la relation de récurrence de la suite :** u = 7820 premier terme n = 0 rang du premier terme while u >= 1000 : n = n + 1 u = u - 554 on calcul le terme suivant
   print(n)

   — **à l'aide de la formule explicite :** u = 7820 premier terme n = 0 rang du premier terme while u >= 1000 : n = n + 1 u = 7820 - 554*n on calcul le terme suivant
   print(n)

   Dans les deux cas, le résultat est le même : 13

   Ce qui signifie que u_{13} est le premier terme à être inférieur à 1000.

   Pour le vérifier par le calcul, on résout l'inéquation :

$$\begin{aligned} u_n < 1000 &\iff 7820 - 554n < 1000 \\ &\iff -554n < 1000 - 7820 \\ &\iff -554n < -6820 \\ &\iff n > \frac{-6820}{-554} \\ &\iff n > 12{,}31\ldots \end{aligned}$$

   Comme n est un entier, cela signifie que le premier n possible est $n = 13$, ce qui correspond bien au résultat de nos programmes Python.

Exercice n°12

Des archéologues du XXX$^{\text{e}}$ siècle découvrent dans une grotte une balance électronique à côté de laquelle se trouvent des sacs et une pancarte sur laquelle est écrite :

En procédant ainsi, l'archéologue dispose en tout sur la balance :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 73 = \frac{73 \times 74}{2} = 2701 \text{ pièces.}$$

Si les pièces pesaient toutes 5 g, cela représenterait une masse totale égale à :

$$2701 \times 5 = 13505 \text{ g.}$$

Mais certaines pièces ne pèsent que 4,5 g.

Supposons qu'elles soient extraites du sac k, pour $1 \leqslant k \leqslant 73$. La masse totale est alors égale, en grammes, à :

$$\begin{aligned} &1 \times 5 + 2 \times 5 + \cdots + k \times 4{,}5 + \cdots + 73 \times 5 \\ &= 1 \times 5 + 2 \times 5 + \cdots + 5k - 0{,}5k + \cdots + 73 \times 5 \\ &= 1 \times 5 + 2 \times 5 + \cdots + k \times 5 + \cdots + 73 \times 5 - 0{,}5k \\ &= 13505 - 0{,}5k. \end{aligned}$$

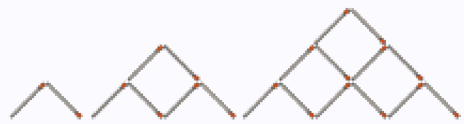
Ainsi, comme la balance indique une masse de 13489 grammes, on a :

$$\begin{aligned} 13505 - 0{,}5k = 13489 &\iff 0{,}5k = 13505 - 13489 \\ &\iff 0{,}5k = 16 \\ &\iff k = \frac{16}{0{,}5} = 32. \end{aligned}$$

Le 32$^{\text{e}}$ sac contient donc les pièces de 4,5 grammes.

Exercice n°13

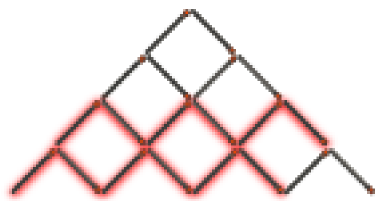
Cédric souhaite construire sur une table, à plat, un « château d'allumettes » à plusieurs étages, comme sur le schéma suivant :



— 2 allumettes sont nécessaires pour le 1$^{\text{er}}$ étage ;
— 4 allumettes sont nécessaires pour le 2$^{\text{e}}$;
— 6 allumettes sont nécessaires pour le 3$^{\text{e}}$
— etc.

On note (u_n) le nombre d'allumettes nécessaires pour le n-ième étage, $n \in *$. Ainsi, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$ et $u_3 = 6$.

1. Pour 4 étages, nous avons :



   On ajoute 2 allumettes par rapport au nombre d'allumettes nécessaires pour l'étage précédent.

   Ainsi, $\underline{u_4 = 6 + 2 = 8.}$

2. Comme mentionné dans la réponse précédente, pour construire l'étage $n+1$, il est nécessaire d'avoir u_n allumettes (nombre d'allumettes pour construire l'étage n) et d'en ajouter 2.

   Ainsi, $u_{n+1} = u_n + 2$, ce qui correspond à la relation de récurrence d'une suite arithmétique de raison 2.

3. Le nombre total d'allumettes pour construire 20 étages correspond à :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} &= 20 \times \frac{u_1 + u_{20}}{2} \\ &= 20 \times \frac{2 + (2 + (20-1) \times 2)}{2} \\ &= 20 \times 21 \\ &= 420. \end{aligned}$$

   Il est donc nécessaire d'avoir 420 allumettes pour construire 20 étages.

4. Le programme Python complété est le suivant : u = 2 S = 0

   for n in range(20) : S = S + u u = u + 2

   print(S)

   Explications :

   — On commence par initialiser la variable `u` à 2 ; elle représente u_1.

— On initialise ensuite la variable `S` à 0 ; elle représentera la somme des allumettes.

— On crée ensuite une boucle « Pour » car on connaît le nombre d'étages (20) ; il faudra donc ajouter 20 termes pour obtenir la somme totale.

— Dans cette boucle, on commence par ajouter à la valeur déjà stockée en `S` la valeur qui est dans `u`...

— ... puis on calcule le `u` suivant en écrivant que c'est l'ancienne valeur de `u` à laquelle on ajoute 2 (la raison de la suite) : « `u = u+2` » est la traduction de la relation $u_{n+1} = u_n + 2$.

— Une fois la boucle terminée, on affiche la valeur stockée dans `S`.

Si on exécute ce programme pas à pas, on a :

`Valeurs de n`	-	0	1	2	$\cdots$	19
`Valeurs de S`	0	$0+2=2$	$2+4=6$	$6+6=12$	$\cdots$	$380+40=420$
`Valeurs de u`	2	$2+2=4$	$4+2=6$	$6+2=8$	$\cdots$	$40+2=42$

La dernière valeur de `S` est la valeur trouvée à la question précédente, à savoir 420.

Exercice n°14

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

1. Si $u_0 = 1$ et $q = 2$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$.
   (u_n) est une suite géométrique donc :
   $$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$
   Donc ici,
   $$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_{100} &= \frac{1-2^{101}}{1-2} \\ u_0 + u_1 + \cdots + u_{100} &= 2^{101} - 1. \end{aligned}$$
2. Si $u_0 = 3$ et $q = \dfrac{1}{2}$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{50}$.
   $$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_{50} &= 3 \times \frac{1-\frac{1}{2^{51}}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 3\left(1 - \frac{1}{2^{51}}\right) \times 2 \\ u_0 + u_1 + \cdots + u_{50} &= 6\left(1 - \frac{1}{2^{51}}\right). \end{aligned}$$
3. Si $u_1 = 60$ et $q = \dfrac{1}{3}$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.
   $$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} &= u_1 \times \frac{1-q^{100}}{1-q} \\ &= 60 \times \frac{1-\frac{1}{3^{100}}}{1-\frac{1}{3}} \\ &= 60\left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right) \times \frac{3}{2} \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} &= 45\left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right). \end{aligned}$$
4. Si $u_1 = 50$ et $q = 10$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{50}$.
   $$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_{50} &= 50 \times \frac{1-10^{50}}{1-10} \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_5 &= \frac{50}{9}\left(10^{50} - 1\right). \end{aligned}$$

Exercice n°15

Un mot de passe est composé de 1 à 25 caractères choisis parmi une liste de 70 symboles.
Donner un ordre de grandeur du nombre total de mots de passe possibles.

— Si le mot de passe comporte 1 seul caractère, alors il y a 70 possibilités (car un caractère est choisi parmi 70 symboles) ;

— si le mot de passe comporte 2 caractères, il y a 70^2 possibilités ;

— si le mot de passe comporte 3 caractères, il y a 70^3 possibilités ; etc.

Ainsi, le nombre total de possibilités est :

$$S = 70 + 70^2 + 70^3 + \cdots + 70^{25}$$

car il y a au plus 25 caractères dans le mot de passe.

$$\begin{aligned} S &= 70\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{24}\right) \quad \text{avec } q = 70 \\ &= 70 \times \frac{q^{25}-1}{q-1} \\ &= 70 \times \frac{70^{25}-1}{70-1} \\ &= \frac{70}{70-1} \times \left(70^{25}-1\right). \end{aligned}$$

On peut considérer que $\dfrac{70}{70-1}$ est proche de 1 et que $70^{25} - 1$ est proche de 70^{25}.

Ainsi, un ordre de grandeur du nombre total de mots de passe est 70^{25}.

Mais par « ordre de grandeur », on peut comprendre « une puissance de 10 ». Nous allons donc aller plus loin.

$$\begin{aligned} 70^{25} &= (7 \times 10)^{25} \\ &= 7^{25} \times 10^{25} \\ &= 7 \times 7^{24} \times 10^{25} \\ &= 7 \times \left(7^2\right)^{12} \times 10^{25} \\ &\approx 7 \times 50^{12} \times 10^{25} \\ &\approx 7 \times 5^{12} \times 10^{12} \times 10^{25} \\ &\approx 7 \times 2 \times 10^8 \times 10^{37} \\ &\approx 14 \times 10^{45} \\ &\approx 10^{46}. \end{aligned}$$

Petite précision : j'ai calculé 5^{12} à l'aide de la calculatrice pour écrire que c'était à peu près égal à 2×10^8.

Exercice n°16

1. Par définition, $c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n$ pour $n \geqslant 1$, avec $c_1 = 10$.
   De plus, $\ell_{n+1} = \frac{2\pi c_{n+1}}{4} = \frac{\pi}{2}c_{n+1}$ (longueur d'un quart de cercle de rayon c_{n+1}).
   Ainsi,
$$\begin{aligned}\ell_{n+1} &= \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2}c_n \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi}{2}c_n\right) \\ &= \frac{1}{2}\ell_n.\end{aligned}$$
   Ainsi, $(\ell)_n)$ est géométrique. Son premier terme est $\ell_1 = \frac{\pi}{2} \times c_1 = \frac{\pi}{2} \times 10 = 5\pi$ et sa raison est $q = \frac{1}{2}$.
2. La longueur totale de la spirale formée avec 10 carrés est :
$$\begin{aligned}\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_{10} &= \ell_1 \times \frac{1-q^{10}}{1-q} \\ &= 5\pi \times \frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 5\pi \times \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right) \times 2 \\ &= 10\pi\left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right) \\ &= 10\pi\left(1 - \frac{1}{1024}\right) \\ &= \frac{5115\pi}{512} \qquad \text{(valeur exacte)} \\ &\approx 31{,}4 \text{ cm.}\end{aligned}$$