Exercice n°1

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 6 = 24$ (avec le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$).
   On sait de plus que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$; ainsi,
   $$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{24}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$
   On a :
   $$\|\vec{v}\|^2 = 6^2 + 2^2 = 40 \qquad \text{soit} \qquad \|\vec{v}\| = 2\sqrt{10}.$$
   De plus, $\|\vec{u}\| = 4$, donc :
   $$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{24}{8\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$
   et donc :
   $$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}) \approx 18°.}$$
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-3) = -9$.
   On sait de plus que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$; ainsi,
   $$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-9}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$
   On a :
   $$\|\vec{v}\|^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \qquad \text{soit} \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{10}.$$
   De plus, $\|\vec{u}\| = 3$, donc,
   $$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-9}{3\sqrt{10}} = \frac{-3\sqrt{10}}{10}.$$
   Ainsi,
   $$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}) \approx 162°.}$$
3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 \times (-6) = -48$ (les deux vecteurs sont de sens contraires donc leur produit scalaire est négatif).
   On sait de plus que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$; ainsi,
   $$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-48}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$
   On a :
   $$\|\vec{v}\|^2 = 1^2 + 6^2 = 37 \qquad \text{soit} \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{37}.$$
   De plus, $\|\vec{u}\| = 8$, donc :
   $$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-48}{8\sqrt{37}} = \frac{-6\sqrt{37}}{37}$$
   et donc,
   $$(\vec{u}, \vec{v}) \approx 171°.$$

Exercice n°2

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 2$. E est le point de $[DC]$ tel que $DE = 1$. Les droites (AE) et (BD) se coupent en H et N est le milieu de $[AB]$.

1. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. En effet,
   $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}$
   $= (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DE}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}})$
   $= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CD}$
   $= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + 0 + 0 + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CD}$
   $= \|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\| \times \|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\| \times \cos\pi$
   $= 4 - 1 \times 4.$
   On en déduit alors que (AE) et (BD) sont perpendiculaires.
2. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$
   $= \mathrm{BH} \times \mathrm{BD}$
   $= \mathrm{BH} \times \sqrt{4^2 + 2^2}$
   $= \mathrm{BH} \times 2\sqrt{5}.$
   De plus, on a aussi :
   $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$
   $= \mathrm{BA} \times \mathrm{BD} \times \cos\widehat{ABD}$
   $= \mathrm{BA} \times \mathrm{BD} \times \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}}$
   $= \mathrm{AB}^2$
   $= 16.$
   Finalement, on a donc :
   $$2\sqrt{5}\mathrm{BH} = 16 \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{BH} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$
3. $$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{HA}} + \overrightarrow{\mathrm{HB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{HN}} + \overrightarrow{\mathrm{NA}}) + (\overrightarrow{\mathrm{HN}} + \overrightarrow{\mathrm{NB}}) \\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{HN}} + (\overrightarrow{\mathrm{NA}} + \overrightarrow{\mathrm{NB}}) \\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{HN}} + \vec{0} \qquad \text{(car N est le milieu de [AB])} \end{aligned}$$
   $\overrightarrow{\mathrm{HA}} + \overrightarrow{\mathrm{HB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{HN}}$
4. $\mathrm{HA}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{HB}^2$
   $\mathrm{HA}^2 = 16 - \dfrac{64}{5}$
   $\mathrm{HA}^2 = \dfrac{16}{5}$
   $\mathrm{HA} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$
   $\mathrm{HA} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}.$
   Ainsi,
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{HN} \cdot \overrightarrow{HA} &= (\overrightarrow{\mathrm{HA}} + \overrightarrow{\mathrm{AN}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{HA}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{HA}}^2 + \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{HA} \\ &= \frac{16}{5} - \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AH}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{16}{5} - 2 \times \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \cos \widehat{HAN} \\
&= \frac{16}{5} - \frac{8\sqrt{5}}{5} \times \frac{\text{AH}}{\text{AB}} \qquad \text{(dans le triangle HAB r} \\
&= \frac{16}{5} - \frac{8\sqrt{5}}{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{16}{5} - \frac{8}{5} \\
\overrightarrow{HN} \cdot \overrightarrow{HA} &= \frac{8}{5}.
\end{aligned}
$$

5. Dans le triangle BAH rectangle en H, [HN] est la médiane issue du sommet de l'angle droit, donc :

$$\text{HN} = \frac{1}{2}\text{AB} \qquad \text{soit} \qquad \text{HN} = 2.$$

6. $\overrightarrow{HN} \cdot \overrightarrow{HA} = \text{HN} \times \text{HA} \times \cos \widehat{AHN}$

$$
\begin{aligned}
\frac{8}{5} &= \frac{8\sqrt{5}}{5} \cos \widehat{AHN} \\
\cos \widehat{AHN} &= \frac{\sqrt{5}}{5} \\
\widehat{AHN} &\approx 63°.
\end{aligned}
$$

Exercice n°3

Soit ABCD un carré. On pose :

Faisons avant tout une figure :

1. Pour calculer $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{AB}$, on peut projeter K sur (AB) ; on obtient un point K' au milieu de [AI]. Ainsi,

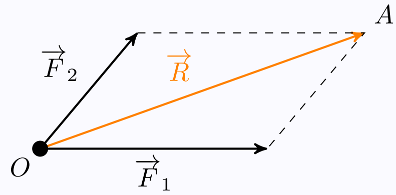
$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{AB} &= AK' \times AB \\
&= \frac{1}{2} AI \times AB \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} AB \times AB \\
&= \frac{1}{4} AB^2.
\end{aligned}
$$

2. Démontrer que (AK) et (JB) sont perpendiculaires est équivalent à démontrer que $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BJ} = 0$.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BJ} &= \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}\right) \\
&= \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{AJ} \\
&= \text{AD} \times \text{AJ} - \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{JA} \\
&= \frac{1}{2}\text{AD}^2 - \frac{1}{4}\text{AB}^2 - \text{DJ} \times \text{JA} \\
&= \frac{1}{2}\text{AD}^2 - \frac{1}{4}\text{AD}^2 - \frac{1}{4}\text{AD}^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Exercice n°4

1. Illustrons la situation avec un schéma :



Construisons le point A de sorte à former un parallélogramme.
Dès lors,

$$
\begin{aligned}
F_1F_2 &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\|^2 - \|\vec{F}_1\|^2 - \|\vec{F}_2\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|\vec{R}\|^2 - \|\vec{F}_1\|^2 - \|\vec{F}_2\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|\vec{R}\|^2 - 300^2 - 200^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|\vec{R}\|^2 - 50\,000\right).
\end{aligned}
$$

De plus,

$$
\begin{aligned}
F_1F_2 &= \|\vec{F}_1\| \times \|\vec{F_2}\| \times \cos F_1F_2 \\
&= 200 \times 300 \times \cos 50° \\
&= 60\,000 \cos 50°.
\end{aligned}
$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\left(\|\vec{R}\|^2 - 50\,000\right) = 60\,000 \cos 50°.$$

d'où :

$$\|\vec{R}\|^2 = 120\,000 \cos 50° + 50\,000$$

et donc :

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{120\,000 \cos 50° + 50\,000} \approx 343{,}496$$

La résultante à donc une intensité d'environ 343 N.

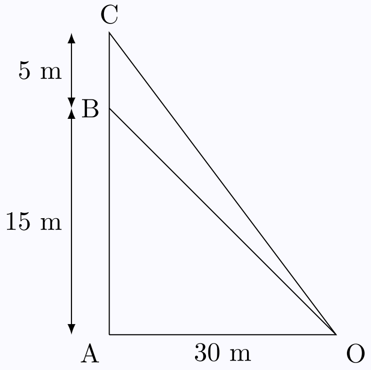
2. (a)
$$
\begin{aligned}
W &= \vec{F} \cdot \vec{u} \\
&= \|\vec{F}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos\left(\vec{F}, \vec{u}\right) \\
&= 2\,000 \times 50 \times \cos 45° \\
&= 50\,000\sqrt{2} \\
&\approx 70\,711 \text{ J.}
\end{aligned}
$$
Le travail de la force est alors égal à 70 711 Joules.

   (b) Notons $\vec{F'}$ la force exercée par un bateau se déplaçant dans la même direction que la péniche. On veut alors :

$$
\begin{aligned}
\vec{F'} \cdot \vec{u} = 70\,711 &\iff \|\vec{F'}\| \times 50 \times \cos F'u = 70\,711 \\
&\iff \|\vec{F'}\| = \frac{70\,711}{50} \approx 1\,414
\end{aligned}
$$

L'intensité de la force du bateau doit donc être environ égale à 1 414 N.

Exercice n°5

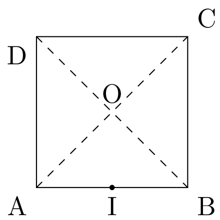


1. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}\right)$
$= \overrightarrow{OA}^2 + \underbrace{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{AB}\times\mathrm{AC}.$
2. On sait que :
$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \mathrm{OB}\times\mathrm{OC}\times\cos(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}).$$
Ainsi, d'après la question précédente,
$$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{AB}\times\mathrm{AC} = \mathrm{OB}\times\mathrm{OC}\times\cos(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}).$$
On en déduit alors :
$$\cos(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}) = \frac{OA^2 + AB\times AC}{OB\times OC} = \frac{900+15\times 20}{\sqrt{30^2+15^2}\times\sqrt{30^2+20^2}} \approx 0{,}992277876714.$$
D'où, $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}) \approx 7°$.

Exercice n°6

Soit ABCD un carré de centre O tel que AB = 2. On pose I le milieu de [AB].

Faisons une figure avant tout.



1. Soit M un point quelconque du plan. Notons H son projeté orthogonal sur (AB).
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 2 \iff \mathrm{AB}\times\mathrm{AH} = 2 \iff \mathrm{AH} = 1.$$
Donc H ∈ [AB) (car le produit scalaire est positif) et H est confondu avec I, ce qui signifie que M est sur la droite perpendiculaire à (AB) passant par I.
M est donc sur (OI).
2. (a) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{MI}}+\overrightarrow{\mathrm{IB}}\right)$
$= \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$
$= \mathrm{MI}^2 + \overrightarrow{\mathrm{MI}}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{\mathrm{IB}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)}_{=\vec{0}} + \mathrm{IA}\times\mathrm{IB}\times\cos\mathrm{IBIA}$
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \mathrm{MI}^2 - 1.$
(b) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 4 \iff \mathrm{MI}^2 - 1 = 4 \iff \mathrm{MI}^2 = 5 \iff \mathrm{IM} = \sqrt{5}.$
Ainsi, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 4$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{5}$.
Or, IB = 1 et BC = 2 donc on s'aperçoit que $\mathrm{IC}^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ et donc que $\mathrm{IC} = \sqrt{5}$.
Par conséquent, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 4$ est le cercle de centre I passant par C.

Exercice n°7

On considère deux points A et B tels que AB = 6, ainsi que I le milieu de [AB].
On pose $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des points M tel que
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k,$$
où $k \in \mathbb{R}$.

1. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{MI}}+\overrightarrow{\mathrm{IB}}\right)$
$= \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$
$= \mathrm{MI}^2 + \overrightarrow{\mathrm{MI}}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{\mathrm{IB}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)}_{=\vec{0}} + \mathrm{IA}\times\mathrm{IB}\times\cos(\overrightarrow{IA},\mathrm{IB})$
$= \mathrm{MI}^2 + 3\times 3\times\cos\pi$
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \mathrm{MI}^2 - 9.$
2. $\mathcal{E}_{16}$ est l'ensemble des points M tels que $MAMB = 16$, c'est-à-dire, d'après la question précédente :
$$\mathrm{MI}^2 - 9 = 16 \quad \text{soit} \quad \mathrm{MI}^2 = 16+9 = 25 \text{ et donc } \mathrm{MI} = 5.$$
Ainsi, $\mathcal{E}_{16}$ est le cercle de centre I et de rayon 5.
3. $\mathcal{E}_k = \varnothing$ s'il n'existe pas de points M vérifiant l'égalité :
$$\mathrm{MI}^2 - 9 = \mathrm{k} \quad \text{soit} \quad \mathrm{MI}^2 = \mathrm{k} + 9.$$
Ceci est le cas si $k + 9 < 0$ (car un carré est toujours positif ou nul), ce qui implique que $k < -9$. Ainsi, pour $k < -9$, $\mathcal{E}_k = \varnothing$.

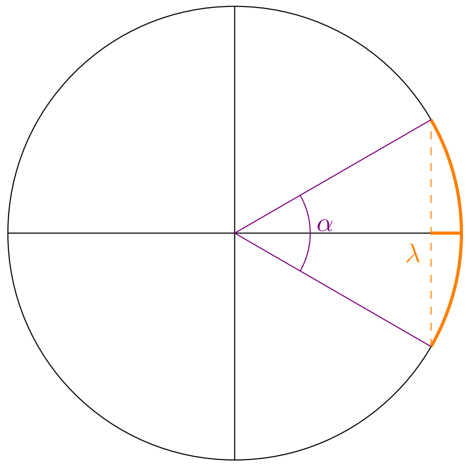
Exercice n°8

1. $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 5$, $AD = 3$ et $AC = 6$.
(a) On sait que :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right) = \frac{1}{2}(6^2 - 5^2 - 3^2)$$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 1.$

(b)
$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$$
$$1 = 5 \times 3 \times \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$$
$$\cos\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{15}$$
$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \approx 86^\circ.$$

2. $EFGH$ est un parallélogramme tel que $EF = 6$, $EH = FH = 5$.
   (a)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EH} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{EF}\|^2 + \|\overrightarrow{EH}\|^2 - \|\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{EH}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{EF}\|^2 + \|\overrightarrow{EH}\|^2 - \|\overrightarrow{HF}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}(6^2+5^2-5^2)\\ \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EH} &= 18.\end{aligned}$$
   (b)
$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EH} = EF \times EH \times \cos(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EH})$$
$$18 = 6 \times 5 \times \cos(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EH})$$
$$\cos(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH}) = \frac{18}{30}$$
$$(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH}) \approx 53^\circ.$$

3. $IJKL$ est un parallélogramme tel que $IK = 8{,}5$ et $JL = 5$.
   (a) Dans cette question, on va toujours utiliser la propriété **??**, mais pas la même égalité.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IL} &= \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IL}\|^2 - \|\overrightarrow{IJ}-\overrightarrow{IL}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}(\|\overrightarrow{IK}\|^2 - \|\overrightarrow{LJ}\|^2)\\ &= \frac{1}{4}(8{,}5^2-5^2)\\ \overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IL} &= \frac{189}{16}.\end{aligned}$$
   (b)
$$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IJ}\cdot(\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IL})$$
$$=$$
$$overrightarrowIJ\cdot\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IL}$$
$$= IJ^2 + \frac{189}{16}.$$
   (c) Par définition,
$$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK} = \|\overrightarrow{IJ}\|\times\|\overrightarrow{IK}\|\times\cos(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}) = 8{,}5\times IJ\times\cos(I$$
   D'après la question précédente, ce même produit scalaire est égal à $IJ^2+\frac{189}{16}$, donc
$$IJ^2 + \frac{189}{16} = 8{,}5 \times IJ \times \cos(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}),$$
   c'est-à-dire :
$$IJ^2 - 8{,}5\cos(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK})IJ + \frac{189}{16} = 0, \qquad \text{(E)}$$
   (d) L'équation (E) est une équation quadratique d'inconnue IJ qui admet au moins une solution (car le parallélogramme existe) donc son discriminant doit être supérieur ou égal à 0 :
$$\left[8{,}5\cos(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}\right]^2 - 4\times 1\times\frac{189}{16} \geqslant 0$$
   soit,
$$\cos^2(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}) \geqslant \frac{189}{4}\times\frac{1}{8{,}5^2}$$
   et donc,
$$\cos^2(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}) \geqslant \frac{189}{289}.$$
   (e) D'après la question précédente, $\cos^2(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}) \geqslant \frac{189}{289}$.
   Comme $0 \leqslant (\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}) < 90^\circ$ (comme angle formé par un côté et une diagonale d'un parallélogramme), on en déduit que $\cos(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}) > 0$, d'où :
$$\cos(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}) \geqslant \sqrt{\frac{189}{289}}.$$
   Regardons sur le cercle trigonométrique ce que signifie l'inégalité $\cos\alpha \geqslant \lambda$:



   À la calculatrice, on trouve que l'angle positif dont le cosinus est égal à $\sqrt{\frac{189}{289}}$ est à peu près 36°.
   Ainsi, on a :
$$0 \leqslant (\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}) \leqslant 36^\circ.$$

Exercice n°9

Dans le plan, on considère un point M et un cercle Γ, de centre O et de rayon r.
Soit d une droite passant par M et coupant Γ en deux points A et B.
On appelle *puissance de M par rapport à Γ* le nombre : $\mathcal{P}_\Gamma(\mathrm{M}) = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{r}^2$.

1. On considère le point H, projeté orthogonal de O sur (AB).

   Ainsi, H est le milieu de [AB] (car AOB est isocèle en O et dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principale est la médiatrice du côté opposé). Donc :
$$\overrightarrow{\mathrm{HB}} = -\overrightarrow{\mathrm{HA}}.$$
   Nous allons calculer $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$:
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{\mathrm{MH}}+\overrightarrow{\mathrm{HA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{MH}}+\overrightarrow{\mathrm{HB}})\\ &= (\overrightarrow{\mathrm{MH}}+\overrightarrow{\mathrm{HA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{MH}}-\overrightarrow{\mathrm{HA}})\\ &= \mathrm{MH}^2 - \mathrm{HA}^2\end{aligned}$$

Or, d'après le théorème de Pythagore,

$$\mathrm{MH}^2 = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{OH}^2 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{HA}^2 = \mathrm{OA}^2 - \mathrm{OH}^2 = \mathrm{r}^2 - \mathrm{OH}^2$$

donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \mathrm{MH}^2 - \mathrm{HA}^2 \\ &= \mathrm{OM}^2 - \mathrm{OH}^2 - \mathrm{r}^2 + \mathrm{OH}^2 \\ &= \mathrm{OM}^2 - \mathrm{r}^2 \\ &= \mathcal{P}(\mathrm{M}).\end{aligned}$$

Ainsi,

— si M est à l'extérieur du cercle,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \mathrm{MA} \times \mathrm{MB} = \mathcal{P}(\mathrm{M})$$

car A et B sont du même côté par rapport à M.

— Si M est à l'intérieur du cercle,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -\mathrm{MA} \times \mathrm{MB} = \mathcal{P}(\mathrm{M})$$

car A et B sont de part et d'autre de M.

2. Avant tout, faisons un schéma :

(a) M est tel que $\mathcal{P}_\Gamma(\mathrm{M}) = \mathcal{P}_{\Gamma'}(\mathrm{M})$ donc, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\Gamma(\mathrm{M}) = \mathcal{P}_{\Gamma'}(\mathrm{M}) &\iff \mathrm{OM}^2 - r^2 = \mathrm{O'M}^2 - r' \\ &\iff \mathrm{OM}^2 - \mathrm{O'M}^2 = r^2 - r'^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ainsi, } r - r'^2 &= \mathrm{MO}^2 - \mathrm{MO'}^2 \\ &= \overrightarrow{\mathrm{MO}}^2 - \overrightarrow{\mathrm{MO'}}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{MO'}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{MO}} - \overrightarrow{\mathrm{MO'}}\right) \\ &= 2MIO'O \\ &= 2KIO'O \text{ car K est le projeté orthogonal de M sur (OO')} \\ r - r' &= 2OO'IK.\end{aligned}$$

(b) Il existe un unique point K tel que :

$$2OO'IK = r^2 - r'^2$$

D'après la question précédente, l'ensemble des points M ayant les mêmes puissances par rapport aux deux cercles est la droite perpendiculaire à (OO') passant par K.

(c) Notons :

— d_1 l'axe radical de Γ et Γ' ;

— d_2 l'axe radical de Γ et Γ'' ;

— d_3 l'axe radical de Γ' et Γ''.

O'' $\notin$ (OO') donc d_1 et d_2 sont sécantes. Appelons J leur intersection. Par définition des deux droites,

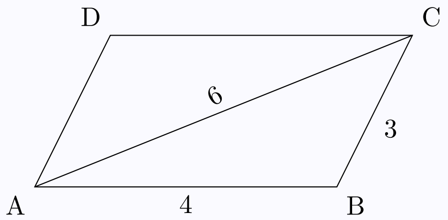
$$\mathcal{P}_\Gamma(\mathrm{J}) = \mathcal{P}_{\Gamma'}(\mathrm{J}) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}_\Gamma(\mathrm{J}) = \mathcal{P}_{\Gamma''}(\mathrm{J})$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{\Gamma'}(J) = \mathcal{P}_{\Gamma'}(J)$, et donc J $\in d_3$.

J est donc le point de concours de d_1, d_2 et d_3.

Exercice n°10

On considère la figure suivante :



ABCD est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $BC = 3$ et $AC = 6$.

Il est assez aisé de voir,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(4^2 + 6^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(16 + 36 - 9).\end{aligned}$$

Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{43}{2}$.

Exercice n°11

On considère un carré ABCD de côté 1.

Dans le repère $\left(A \,;\, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$,

$$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

où x est un nombre réel inconnu. On cherche à déterminer la valeur de x.

$$\begin{aligned}(AF) \perp (DE) &\iff DEAF = 0 \\ &\iff 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}x = 0 \\ &\iff x = 2 + \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Le point F doit donc être tel que :

$$\overrightarrow{BF} = (2 + \sqrt{3})\overrightarrow{BC}.$$