Corrigés

Série d'exercices — Classe : 1re SPE — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Simplifier les nombres suivants en donnant le résultat sous la forme d'une seule exponentielle.

1. $e^5 \times e^{-3} = e^{5+(-3)} = e^2$.
2. $\dfrac{e^{-9}}{e^7} = e^{-9-7} = e^{-16}$.
3. $\left(e^{-2}\right)^3 = e^{-2\times 3} = e^{-6}$.
4. $\dfrac{e^3 \times e^{-4}}{e^{-2}} = e^{3-4-(-2)} = e^1 = e$.
5. $\dfrac{e^2 \times e^{-2}}{e^{-1}} = e^{2-2+1} = e$.
6. $\left(e^{-1} \times e^{-2}\right)^3 = e^{(-1-2)\times 3} = e^{-9}$.

Exercice n°2

Simplifier les expressions suivantes en donnant le résultat sous la forme d'une seule exponentielle.

1. $e^{2x-1} \times e^{-x+3} = e^{2x-1-x+3} = e^{x+2}$.
2. $\dfrac{e^{3x-1}}{e^{4x-2}} = e^{3x-1-(4x-2)} = e^{-x+1}$.
3. $\left(e^{-x+1} \times e^{x-1}\right)^2 = e^{(-x+1+x-1)\times 2} = e^0 = 1$.
4. $\left(\dfrac{e^{2x+3} \times e^{3x-2}}{e^4}\right)^{-1} = e^{(2x+3+3x-2-4)\times(-1)} = e^{-5x+3}$.

Exercice n°3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. Une exponentielle étant toujours strictement positive, l'équation $e^{x+2} = 0$ n'admet aucune solution. $\mathcal{S} = \varnothing$.
2. Une exponentielle étant toujours strictement positive, l'équation $e^{x^5+x+1} = -1$ n'admet aucune solution. $\mathcal{S} = \varnothing$.
3. $$\begin{aligned} e^{2x+3} = e^{-2x-5} &\iff 2x+3 = -2x-5 \\ &\iff 4x = -8 \\ &\iff x = -2. \end{aligned}$$
   L'ensemble solution de l'équation $e^{2x+3} = e^{-2x-5}$ est donc $\mathcal{S} = \{-2\}$.
4. $$\begin{aligned} e^{5x+2} = e^{3x+1} &\iff 5x+2 = 3x+1 \\ &\iff 2x = -1 \\ &\iff x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$
   L'ensemble solution de l'équation $e^{5x+2} = e^{3x+1}$ est donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.
5. $$\begin{aligned} 5 - 2e^{3x+2} = 3 &\iff -2e^{3x+2} = -2 \\ &\iff e^{3x+2} = 1 \\ &\iff e^{3x+2} = e^0 \\ &\iff 3x+2 = 0 \\ &\iff x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$
   L'ensemble solution de l'équation $5-2e^{3x+2} = 3$ est donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.
6. $$\begin{aligned} 2 + 3e^{2x} = 5 &\iff 3e^{2x} = 3 \\ &\iff e^{2x} = 1 \\ &\iff e^{2x} = e^0 \\ &\iff 2x = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$
   L'ensemble solution de l'équation $2+3e^{2x} = 5$ est donc $\mathcal{S} = \{0\}$.
7. $$\begin{aligned} 7 - 4e^{5x-3} = 3 &\iff -4e^{5x-3} = -4 \\ &\iff e^{5x-3} = 1 \\ &\iff e^{5x-3} = e^0 \\ &\iff 5x-3 = 0 \\ &\iff x = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$
   L'ensemble solution de l'équation $7-4e^{5x-3} = 3$ est donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{5}\right\}$.

Exercice n°4

1. $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$. On pose $X = e^x$. Ainsi, comme $e^{2x} = \left(e^x\right)^2$, l'équation est équivalente à :
   $$X^2 - 2X + 1 = 0 \iff (X-1)^2 = 0 \iff x = 0.$$
   L'ensemble solution est donc $\boxed{\mathcal{S} = \{0\}}$
2. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$. On pose $X = e^x$ et l'équation devient : $X^2 + X - 2 = 0$.
   Le discriminant du polynôme X^2+X-2 est $\Delta = 9$ donc il admet deux racines :
   $$X_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{-1+3}{2} = 1.$$
   Ainsi, $e^{x_1} = -2$ et $e^{x_2} = 1$.
   Une exponentielle étant strictement positive, $e^{x_1} = -2$ est impossible.
   $e^{x_2} = 1 \iff x_2 = 0$ donc l'ensemble solution est $\mathcal{S} = \{0\}$.

Exercice n°5

1. $e^{3x-1} > e^{2x+4} \iff 3x-1 > 2x+4 \iff x > 5.$

   L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} =]5;+\infty[$.
2. $e^{-2x+5} \leqslant e^{4x+7} \iff -2x+5 \leqslant 4x+7 \iff 6x \geqslant -2 \iff x \geqslant -\dfrac{1}{3}.$

   L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.
3. $e^{x^2-1} < e \iff x^2-1 < 1 \iff x^2-2 < 0.$
   x^2-2 admet pour racines $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, et est négatif entre ses racines.

   L'ensemble solution de l'inéquation est donc $\mathcal{S} = \left]-\sqrt{2};\sqrt{2}\right[$.
4. $$\begin{aligned} 12-4e^{5x+1} \geqslant 8 &\iff -4e^{5x+1} \geqslant -4 \\ &\iff e^{5x+1} \leqslant 1 \\ &\iff e^{5x+1} \leqslant e^0 \\ &\iff 5x+1 \leqslant 0 \\ &\iff x \leqslant -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

   L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \left]-\infty;-\dfrac{1}{5}\right]$.
5. $$\begin{aligned} 8+3e^{-2x+3} \leqslant 11 &\iff 3e^{-2x+3} \leqslant 3 \\ &\iff e^{-2x+3} \leqslant 1 \\ &\iff e^{-2x+3} \leqslant e^0 \\ &\iff -2x+3 \leqslant 0 \\ &\iff -2x \leqslant -3 \\ &\iff x \geqslant \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

   L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \left[\dfrac{3}{2};+\infty\right[$.
6. $$\begin{aligned} 56+14e^{47x-15} > 70 &\iff 14e^{47x-15} > 14 \\ &\iff e^{47x-15} > 1 \\ &\iff 47x-15 > 0 \\ &\iff x > \frac{15}{47}. \end{aligned}$$

   L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \left]\dfrac{15}{47};+\infty\right[$.

Exercice n°6

1. $$\begin{aligned} & e^{2x}+e^x-2 \geqslant 0 \\ \iff\ & X^2+X-2 \geqslant 0 \text{ avec} X = e^x \\ \iff\ & (X-1)(X+2) \geqslant 0 \\ \iff\ & \left(e^x-1\right)\left(e^x+2\right) \geqslant 0 \\ \iff\ & e^x-1 \geqslant 0 \text{ (car } e^x+2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}) \\ \iff\ & e^x \geqslant 1 \\ \iff\ & x \geqslant 0. \end{aligned}$$
   L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = [0;+\infty[$.
2. $e^{2x}-2e^x+1 \leqslant 0$

   $\iff X^2-2X+1 \leqslant 0$

   avec $X = e^x$

   $$\begin{aligned} &\iff (X-1)^2 \leqslant 0 \\ &\iff (X-1)^2 = 0 \text{ car } (X-1)^2 > 0 \\ &\iff X = 1 \\ &\iff e^x = 1 \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

   L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \{0\}$.

Exercice n°7

On considère la fonction f définie par pour tout réel x par :

$$f(x) = (7x-1)e^x$$

1. $f(x) = (7x-1)e^x$ est de la forme $u \times v$ avec :

   $u(x) = 7x-1$ $\qquad$ $v(x) = e^x$
   $u'(x) = 7$ $\qquad$ $v'(x) = e^x$

   D'où :

   $$\begin{aligned} f'(x) &= (u'v+v'u)(x) \\ &= 7e^x+(7x-1)e^x \\ f'(x) &= (7+7x-1)e^x \\ f'(x) &= (7x+6)e^x. \end{aligned}$$

2. Afin d'étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, nous devos trouver le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   Or, pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $7x+6$.

   $$\begin{aligned} 7x+6 > 0 &\iff 7x > -6 \\ &\iff x > -\frac{6}{7} \end{aligned}$$

   On en déduit alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{6}{7}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Exercice n°8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (3-2x)e^{-x}.$$

1. $f(x) = (3-2x)e^{-x}$ est de la forme $f = u \times v$ avec :

   $u(x) = 3-2x$ $\qquad$ $v(x) = e^{-x}$
   $u'(x) = -2$ $\qquad$ $v'(x) = -e^{-x}$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (u'v+v'u)(x)\\
f'(x) &= -2e^{-x} - e^{-x}(3-2x)\\
f'(x) &= \big[(-2-(3-2x)\big]e^{-x}\\
f'(x) &= (-2-3+2x)e^{-x}\\
f'(x) &= (2x-5)e^{-x}.
\end{aligned}$$

2. Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(2x-5)$.

$$\begin{aligned}
2x-5>0 &\iff 2x>5\\
&\iff x>\frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Exercice n°9

$f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, avec $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'v-v'u}{v^2}\\
&= \frac{e^x(1+e^x) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2}\\
&= \frac{e^x +^{2x} - e^{2x}}{(1+e^x)^2}\\
f'(x) &= \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0
\end{aligned}$$

Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (inutile de faire un tableau de variations quand la fonction est strictement monotone comme ici).

Exercice n°10

$f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, avec $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'v-v'u}{v^2}\\
&= \frac{e^x(1+e^x) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2}\\
&= \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(1+e^x)^2}\\
f'(x) &= \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0
\end{aligned}$$

Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (inutile de faire un tableau de variations quand la fonction est strictement monotone comme ici).

Exercice n°11

On considère la fonction f définie pour tout réel x appartenant à son domaine de définition par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}-6}{2e^x+7}.$$

1. $f(x)$ est un quotient ; par conséquent, f est définie uniquement pour toutes les valeurs de x pour lesquelles le dénominateur de $f(x)$ est non nul.
   Or, pour tout réel x, $e^x > 0$, donc $2e^x > 0$ et par conséquent, $2e^x + 7 > 0$.
   Le dénominateur de $f(x)$ n'est donc jamais nul.
   Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R}$.
2. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :

   $u(x) = e^{2x} - 6$ $\qquad$ $v(x) = 2e^x + 7$
   $u'(x) = 2e^{2x}$ $\qquad$ $v'(x) = 2e^x$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{\big[v(x)\big]^2}\\
&= \frac{2e^{2x}(2e^x+7) - 2e^x(e^{2x}-6)}{(2e^x+7)^2}\\
&= \frac{2e^x\big[e^x(2e^x+7) - (e^{2x}-6)\big]}{(2e^x+7)^2}\\
&= \frac{2e^x\big[2e^{2x} + 7e^x - e^{2x} + 6\big]}{(2e^x+7)^2}\\
f'(x) &= \frac{2e^x(e^{2x}+7e^x+6)}{(2e^x+7)^2}.
\end{aligned}$$

3. Pour tous réels x,
   — $2e^x > 0$,
   — $e^{2x} + 7e^x + 6 > 0$ comme comme de termes strictement positifs,
   — $(2e^x+7)^2 > 0$.
   Ainsi, $f'(x) > 0$ sur ; la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°12

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x-1)\big(2-e^{-x}\big).$$

1. f est de la forme uv avec $u(x) = x-1$ et $v(x) = 2-e^{-x}$.
   Ainsi, $f' = u'v + uv'$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{-x}$.
   D'où :
   $$\begin{aligned}
   f'(x) &= 2 - e^{-x} + (x-1)e^{-1}\\
   &= 2 - e^{-x} + xe^{-x} - e^{-x}\\
   f'(x) &= xe^{-x} + 2(1-e^{-x}).
   \end{aligned}$$
2. Si $x > 0$, alors $e^{-x} > 1$ et $1 - e^{-x} > 0$.
   De plus, $xe^{-x} > 0$ donc, par somme de termes positifs, $f'(x) > 0$.
3. $f'(0) = 0$.
   De la question précédente, on déduit que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Exercice n°13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = e^x\sqrt{x}.$$

1. $f'(x) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) e^x$, soit $f'(x) = \left(\dfrac{1+2x}{2\sqrt{x}}\right) e^x$.
2. $x > 0 \iff 1 + 2x > 0 \iff f'(x) > 0$ (car $e^x > 0$ et $2\sqrt{x} > 0$) d'où le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$

Exercice n°14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = e^x\sqrt{x}.$$

(a) Déterminer $f'(x)$.

(b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+$. Dresser un tableau de variations de f.

Exercice n°15

On peut modéliser le taux d'équipement en smartphones des adultes français au cours de l'année $2015 + t$ par le fonction f définie pour tout réel positif t par :

$$f(t) = \frac{1}{1 + e^{-0,5t}}.$$

(a) f est de la forme $\dfrac{1}{v}$ donc f' sera de la forme $-\dfrac{v'}{v^2}$ et donc :

$$f'(t) = \frac{0{,}5e^{-0,5t}}{\left(1 + e^{-0,5t}\right)^2}.$$

Ainsi $f'(t) > 0$ pour tout réel t, donc à plus forte raison pour $t \geqslant 0$.

f est donc croissante sur $[0; +\infty[$.

(b) On peut s'aider du programme Python suivant :

on importe la fonction exponentielle du module "math" from math import exp

t = 0 while 1/(1+exp(-0.5*t)) <= 0.9 : t += 0.1

print(t)

On part de $t = 0$ et on calcule l'image de t tant que celle-ci est inférieure ou égale à 90, c'est-à-dire 0,9. Tant que cette image ne dépasse pas 0,9, on ajoute 0,1 à t.

Le programme retourne alors la valeur « 4,4 » ; c'est donc au cours de la 4^{e} année que le taux dépassera 90.

Exercice n°16

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(a) Le domaine de définition de f ($\mathbb{R}$) est centré en 0.

De plus, pour tout réel x, $f(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -f(x)$.

f est donc impaire.

(b) f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x - e^{-x}$ et $v(x) = e^x + e^{-x}$.

Ainsi, $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = e^x + e^{-x} = v(x)$ et $v'(x) = e^x - e^{-x} = u(x)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left[v(x)\right]^2 - \left[u(x)\right]^2}{\left[v(x)\right]^2} \\ &= \frac{\left[v(x) - u(x)\right]\left[v(x) + u(x)\right]}{\left[v(x)\right]^2} \\ &= \frac{2e^{-2x} \times 2e^{2x}}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} \\ f'(x) &= \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $f'(x) > 0$ sur , ce qui signifie que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(c) $f'(0) = \dfrac{4}{(1+1)^2} = 1$ et $f(0) = 0$ donc l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est $y = x$.

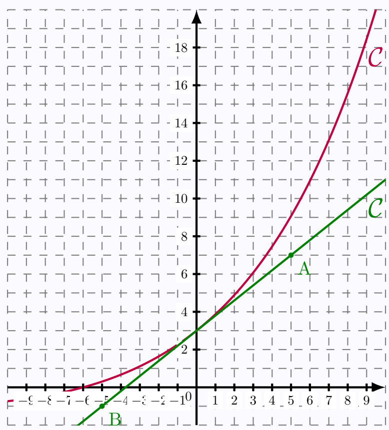
Exercice n°17

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (ax + b)^{kx}$$

où a, b et k sont trois nombres réels.

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de f est donnée ci-dessous :



(a) D'après le graphique, $f(0) = 3$.

Or, $f(0) = (a \times 0 + b)e^0 = b \times 1 = b$, donc $b = 3$.

(b) $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en $x = -6$, ce qui signifie que $f(-6) = 0$.

Donc $f(-6) = (a \times (-6) + 3)^{kx} = 0$. Une exponentielle n'étant jamais nulle, cela signifie que $-6a + 3 = 0$, soit $a = 0{,}5$.

(c) $f'(0)$ est le coefficient directeur de $\mathcal{T}$. Pour le déterminer, on calcule :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-7}{-5-5} = 0{,}8.$$

Or, si $f(x) = (ax+3)^{kx}$ alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= ae^{kx} + (ax+3) \times ke^{kx} \\ &= (a + akx + 3k)e^{kx}. \end{aligned}$$

Ainsi, $f'(0) = (a+3k)e^0 = a + 3k$ et donc $a + 3k = 0{,}8$.

En remplaçant a par 0,5, on a : $3k = 0{,}3$, soit $k = 0{,}1$.

Finalement on trouve $f(x) = (0{,}5x+3)e^{0{,}1x}$

Exercice n°18

On injecte à toutes les personnes d'un groupe d'individus infectés par un virus un antidote à l'instant $x = 0$. Le taux de personnes ayant le virus à l'instant x est donné par la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par :

$$f(x) = e^{-x}\sqrt{x+1}\,,$$

où x est exprimé en jour.

(a) f est de la forme uv, avec :

$$u(x) = e^{-x} \qquad u'(x) = -e^{-x}$$
$$v'(x) = \sqrt{x+1} \qquad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

donc $f'(x) = (u'v + uv')(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-e^{-x}\right)\sqrt{x+1} + e^{-x} \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}\right)e^{-x} \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} \times \frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}\right)e^{-x} \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{2(x+1)}{2\sqrt{x+1}}\right)e^{-x} \\ &= \left(\frac{1-2x-2}{2\sqrt{x+1}}\right)e^{-x} \\ &= \left(\frac{-2x-1}{2\sqrt{x+1}}\right)e^{-x} \\ &= -(2x+1)\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

$\dfrac{-x}{2\sqrt{x+1}} > 0$ et $(2x+1) > 0$ (car $x \geqslant 0$) donc $f'(x) < 0$.

Ainsi, f est strictement décroissante pour $x \geqslant 0$.

(b) La boucle s'exécute tant que la valeur f calculée est supérieure à 0,5. Or, $\sqrt{x+1}e^{-x}$ correspond au taux de malades restants donc la boucle s'arrêtera pour la valeur de x telle que $f(x) \leqslant 0{,}5$.

Remarquons de surcroît que x est augmenté de $\dfrac{1}{24}$ à chaque passage dans la boucle, ce qui correspond à 1 heure.

La valeur affichée est donc le moment (exprimé en jour décimal) où il y aura 50 ou moins de malades par rapport au jour initial.

(c) $x = 1{,}08333$ jour $= 1{,}08333 \times 24$ heures $= 26$ heures.

Ainsi, après 26 heures, le taux de malades est inférieur à 50.

(d) On trouve $x \approx 3$.

Ainsi, après 3 jours, le taux de malades est inférieur à 10.