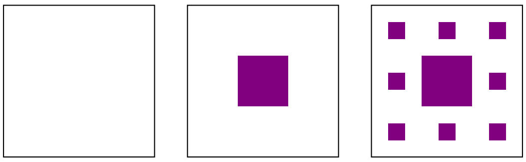
1re Spé Maths
Approfondissement

Suites Numériques

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

Tapis de Sierpinski : On décompose un carré de 81 cm de côté en 9 carrés comme ci-dessous dans la figure 1. On noircit le carré central. Puis les 8 carrés restants sont divisés en 9 carrés. Dans ces 8 carrés, on noircit le carré central et ainsi de suite…



Étape 0 Étape 1 Étape 2

Partie I : Aire non colorée

Soit (A_n) l'aire non colorée du carré à l'ordre n.

1. Calculer A_0, A_1, A_2.
2. Trouver une relation liant A_{n+1} et A_n pour tout entier n.
3. En déduire la nature de la suite (A_n) et l'expression de A_n en fonction de n.

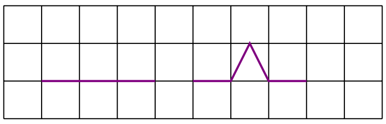
Partie II : Périmètre de la surface non colorée

Soit (P_n) la somme des périmètres de tous les carrés à l'ordre n.

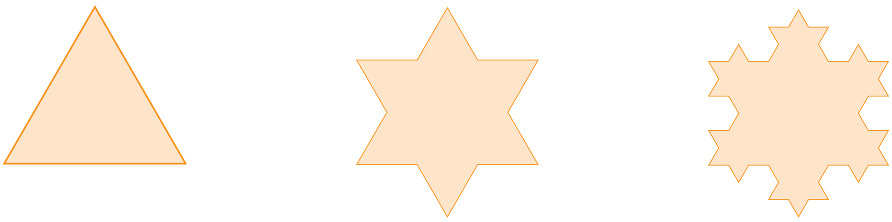
1. Calculer P_0, P_1, P_2.
2. Trouver une relation liant P_{n+1} et P_n pour tout entier naturel n.
3. En déduire la nature de la suite (P_n) et l'expression de P_n en fonction de n.

Exercice 2 :

Étape 0 : On considère un triangle équilatéral dont les côtés mesurent 1 unité.
Étape 1 : On divise chaque segment en 4 segments de **même longueur** formant une ligne brisée.



Étapes suivantes : On recommence ce procédé en divisant chaque segment par quatre segments de même longueur formant une ligne brisée.
À chaque étape, on obtient un polygone dont on va étudier l'aire et le périmètre.



Étude du périmètre de la figure

On appelle $p_n$le périmètre du polygone à l'étape n.

1. Déterminer p_0, p_1 et p_2.

$\boxed{2}$ Montrer que $p_{n+1} = \dfrac{4}{3} p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{3}$ En déduire la nature de la suite (p_n) et l'expression de p_n en fonction de n.

Étude de l'aire de la figure

On appelle a_n l'aire du polygone à l'étape n.

$\boxed{1}$ Déterminer a_0, a_1 et a_2.

$\boxed{2}$ Montrer que $a_{n+1} = a_n + \dfrac{\sqrt{3}}{4 \times 3^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 :

n considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

$\boxed{1}$ Calculer à la main les quatre premiers termes de la suite (u_n).

$\boxed{2}$ Étudier la monotonie de la suite (u_n).

$\boxed{3}$ n étant un entier naturel non nul, écrire un algorithme qui calcule les n premiers termes de la suite (u_n).

$\boxed{4}$ Conjecturer la limite éventuelle de la suite (u_n).

$\boxed{5}$ Écrire un algorithme permettant de déterminer un seuil N (entier naturel non nul) tel que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \geq 10^3$.

Exercice 4 :

n considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 4n + 3. \end{cases}$$

$\boxed{1}$ Démontrer que la suite u est strictement croissante.

$\boxed{2}$ On admet que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

$\boxed{3}$ Écrire un algorithme déterminant, pour un réel A, à partir de quelle valeur de n on a $u_n \geq A$.

Exercice 5 :

n considère la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n, par $w_n = \dfrac{n + 2(-1)^n}{n+2}$.

$\boxed{1}$ (a) Déterminer l'expression de w_n pour les entiers naturels n pairs.

(b) Déterminer l'expression de w_n pour les entiers naturels n impairs, puis simplifier l'expression.

$\boxed{2}$ Soient (p_n) et (i_n) les suites définies, pour tout entier naturel n, par $p_n = w_{2n}$ et $i_n = w_{2n+1}$.

(a) Donner l'expression de p_n en fonctionde n.
Que remarque-t-on ?

(b) Exprimer i_n et i_{n+1} en fonction de n. En déduire que la suite (i_n) est croissante.

3 Que peut-on dire sur la monotonie de (w_n) ?