1re Spé Maths
Approfondissement

Dérivation

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

Soit :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<0 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Démontrer qu'en $a=0$, f est dérivable à droite, mais pas à gauche.

Exercice 2 :

Soit P une fonction polynôme du 3ᵉ degré, défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, où a, b, c et d sont quatre réels, $a \neq 0$. On cherche à trouver un critère permettant de donner la multiplicité d'une racine x_0 de P, c'est-à-dire le nombre de fois où l'on peut mettre $(x-x_0)$ en facteur dans $P(x)$.

1. Commençons par établir une formule avec $x_0=0$.
   (a) Déterminer la fonction P'.
   (b) Déterminer la fonction P'', dérivée de P'.
   (c) Déterminer la fonction P''', dérviée de P''.
   (d) Vérifier que :
   $$P(x)=P(0)+P'(0)x+\frac{P''(0)}{2}x^2+\frac{P'''(0)}{6}x^3.$$

2. (a) On suppose que 0 est racine simple de P, c'est-à-dire que $P(x)$ est factorisable par x (mais pas par x^2). Que peut-on en déduire sur $P(0)$? de $P'(0)$?
   (b) Étudier la réciproque.

3. On suppose que 0 est racine double de P, c'est-à-dire que $P(x)$ est factorisable par x^2 (mais pas par x^3). Que peut-on en déduire sur $P(0)$, $P'(0)$ et $P''(0)$? Et réciproquement ?

4. On veut maintenant voir si on peut étendre le critère à un réel x_0 quelconque.
   (a) Vérifier que :
   $$P(x)=P(x_0)+P'(x_0)(x-x_0)+\frac{P''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{P'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3$$
   (b) A quelles conditions le réel x_0 est-il racine simple ? double ? triple de P ?
   (c) Application à $P : x \mapsto x^3+x^2-5x+3$. Déterminer une racine évidente de P et donner sa multiplicité. En déduire la forme factorisée de $P(x)$.

5. Extension au 4ᵉ degré. Déterminer une racine évidente de la fonction $P : x \mapsto x^4-x^3+x^2-3x+2$, donner sa multiplicité et en déduire la forme factorisée du polynôme.

Exercice 3 :

Soit $f : x \mapsto x\sqrt{x}$.

1. Étude graphique :
   Représenter f, en utilisant la calculatrice. Semble-t-elle dérivable en 0 ? Si oui, quelle semble être la valeur de $f'(0)$?

2 Étude théorique :

(a) D'après une propriété du cours, que l'on précisera, sur quel intervalle f est-elle dérivable ?

(b) Déterminer alors $f'(x)$ sous la forme $k\sqrt{x}$ où k est une constante réelle à préciser.

(c) Cette dernière formule permet-elle d'affirmer que $f'(0) = 0$?

(d) En revenant à la définition du nombre dérivé, étudier la dérivabilité de f en 0.

3 Point de logique
« f et g sont dérivables en a » est-elle une condition nécessaire ou suffisante à « fg est dérivable en a » ?

Exercice 4 :

Soit $\mathscr{H}$ l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ et $P(x_P; y_P)$ un point du plan. On souhaite répondre à la question suivante : « Par P, combien peut-on mener de tangentes à $\mathscr{H}$? » Soit M un point de $\mathscr{H}$ d'abscisse a et $\mathscr{T}_M$ sa tangente en en M.

1 Déterminer une équation de $\mathscr{T}_{\mathscr{M}}$ en fonction de a.

2 Démontrer que P appartient à $\mathscr{T}_M$ si et seulement si $a^2 y_P - 2a + x_P = 0$.

3 Répondre à la question posée dans chacun des cas suivants :

(a) $P(-2; 4)$;

(b) $P(2; 2)$;

(c) $P(1; 0)$.

4 Plus généralement, déterminer les points du plan par lesquels on peut mener deux tangentes à $\mathscr{H}$; une tangente ; aucune tangente.